高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：99.10.07					
範圍	2-1 多項式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分 ）

1. 設二次函數 $y=2x^2+2x-1$ 之圖形為 Γ，若將圖形 Γ 沿坐標軸向右平移 3 個單位，再向下平移 2 個單位，則所得新圖形的函數為 $y=$____________ .

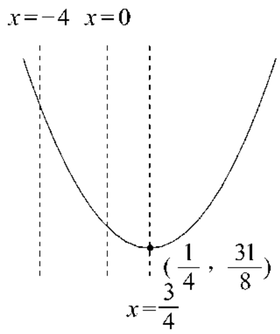
解答　$2x^2-10x+9$

解析　圖形右移 3 單位，下移 2 單位

則原式 $\Rightarrow$ $y+2=2(x-3)^2+2(x-3)-1$ $\Rightarrow$ $y+2=2(x^2-6x+9)+2x-6-1$

得 $y=2x^2-10x+9$

2. 若二次函數 $y=2x^2-x+4$，當 $-4\le x\le 0$ 時，y 之最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m$ 之值為____________ .



解答　44

解析

$$y=2x^2-x+4=2(x^2-\frac{1}{2}x)+4$$

$$=2(x-\frac{1}{4})^2+4-2\cdot\frac{1}{16}=2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{31}{8}$$，頂點為$(\frac{1}{4}，\frac{31}{8})$

$\Rightarrow$ 由圖知，當 $x=0$ 時，有最小值 $m=4$；當 $x=-4$ 時，有最大值 M

而 $M=2(-4)^2-(-4)+4=2\cdot 16+4+4=40$　$\therefore$ $M+m=44$

3. 設 k 為實數，若二次函數 $f(x)=x^2-4x+(k+1)$，在 $0\le x\le 3$ 時，有最大值 2003，求 k 之值為____________ .

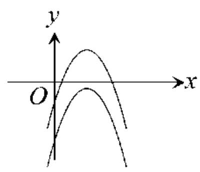
解答　2002

解析　$f(x)=x^2-4x+(k+1)$（$0\le x\le 3$）$=(x-2)^2+(k-3)$

當 $x=0$ 時，有最大值 $k+1=2003$ $\Rightarrow$ $k=2002$

4. 拋物線 $y=ax^2+bx+c$，若 $a<0$，$b>0$，$c<0$，則

(1)頂點在第____________象限內。　(2)拋物線必不通過第____________象限。



解答　(1)一或四;(2)二

解析　$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$，頂點$(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$

$\because$ $a<0$，$b>0$ $\therefore$ $-\frac{b}{2a}>0$ $\Rightarrow$ 頂點在 y 軸右邊

$a<0$ $\Rightarrow$ 開口向下，$c<0$ $\Rightarrow$ 與 y 軸交點在 x 軸下方

但 b^2-4ac 正負不定，故頂點在一或四象限內，拋物線不過第二象限

5. 已知二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，圖形以(2，3)為頂點，又通過點(3，1)，則數對$(a，b，c)$ =____________ .

解答　$(-2，8，-5)$

解析　$y=f(x)=ax^2+bx+c$

令 $f(x)=a(x-2)^2+3$ ……①，(3，1)代入① $\Rightarrow$ $a=-2$

$\therefore\ \ f(x) = -2(x-2)^2 + 3 = -2x^2 + 8x - 5$ 比較係數

即數對$(a，b，c) = (-2，8，-5)$

6. 設一拋物線 $y = x^2 + ax + b$，其中 a，b 皆為實數，若通過$(3，2)$且頂點在直線 $L：x - y - 1 = 0$ 上，求數對$(a，b)$ =__________．（有兩組解）

解答 $(-4，5)，(-6，11)$

解析 $(3，2)$代入 $y = x^2 + ax + b \ \Rightarrow\ b = -3a - 7$ ……①

則 $y = x^2 + ax + b = x^2 + ax + (-3a - 7) = (x + \frac{a}{2})^2 - 3a - 7 - \frac{a^2}{4}$

頂點$(\frac{-a}{2}，-3a - 7 - \frac{a^2}{4})$代入 $x - y - 1 = 0 \ \Rightarrow\ a^2 + 10a + 24 = 0$

即$(a + 4)(a + 6) = 0$，$a = -4$ 或-6 代入①得 $b = 5$ 或 11 ，

$\therefore\ \ (a，b) = (-4，5)$或$(-6，11)$

7. 設 $f(x) = 2345x + 56789$，則 $\dfrac{f(\sqrt{4321}) - f(\sqrt{3210})}{\sqrt{4321} - \sqrt{3210}}$ 之值為__________．

解答 2345

解析 線型函數 $y = ax + b$ ，其中 a 為斜率

$\because\ \ f(x)$圖形為一直線，通過點 $A(\sqrt{4321}，f(\sqrt{4321}))$，$B(\sqrt{3210}，f(\sqrt{3210}))$

$\therefore$ 其斜率為 $\dfrac{f(\sqrt{4321}) - f(\sqrt{3210})}{\sqrt{4321} - \sqrt{3210}} = 2345$

8. $x \in \boldsymbol{R}$，則 $f(x) = (x^2 + 2x + 5)^2 + 2(x^2 + 2x + 5) + 7$ 的最小值為__________．

解答 31

解析 設 $k = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 \geq 4$

$f(x) = k^2 + 2k + 7 = (k + 1)^2 + 6$

$\because\ \ k \geq 4 \ \ \therefore\ \ k + 1 \geq 5 \ \Rightarrow\ (k + 1)^2 \geq 25 \ \Rightarrow\ (k + 1)^2 + 6 \geq 31$，即 $f(x) \geq 31$

$\therefore\ \ f(x)$之最小值為 31

9. 二次函數 $y = ax^2 + bx$ 在 $x = 2$ 時有最大值 $-\frac{1}{a}$，求序對 (a, b) =__________．

解答 $(-\frac{1}{2}, 2)$

解析 $\because$在 $x = 2$ 有最大值 $-\frac{1}{a}$ ，$\therefore$設 $f(x) = a(x-2)^2 - \frac{1}{a}$ 且 $a < 0$

展開$\Rightarrow$ $f(x) = ax^2 - 4ax + (4a - \frac{1}{a})$ ，比較係數

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a - \frac{1}{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow 4a^2 - 1 = 0 \quad \therefore (2a+1)(2a-1) = 0$$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$（不合） $\therefore b = -4a = (-4) \times (-\frac{1}{2}) = 2$ ，故序對 $(a, b) = (-\frac{1}{2}, 2)$

10.若二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形過 $A(-2, 11)$， $B(-1, 1)$， $C(2, -5)$ 三點，求

(1) $f(x)$ =__________． (2)頂點為__________． (3)對稱軸為__________．

解答 (1) $2x^2-4x-5$;(2) $(1,\ -7)$;(3) $x=1$

解析 (1)$\because$ $y=ax^2+bx+c$ 圖形過 $A(-2,\ 11)$， $B(-1,\ 1)$， $C(2,\ -5)$

$$\therefore \begin{cases} 4a-2b+c=11\cdots\cdots① \\ a-b+c=1\cdots\cdots② \\ 4a+2b+c=-5\cdots\cdots③ \end{cases}$$

$$\begin{matrix} ①-② \Rightarrow 3a-b=10 \\ ③-② \Rightarrow 3a+3b=-6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow c=-5\ ,\quad \therefore f(x)=2x^2-4x-5$$

(2) $f(x)=2x^2-4x-5=2(x-1)^2-7$ $\therefore$頂點 $(1,\ -7)$

(3)對稱軸 $x=1$

11.對任意實數 x， $f(x)=-2x^2+3x-k$ 函數值恆為負數，求實數 k 的範圍為____________．

解答 $k>\dfrac{9}{8}$

解析 函數恆負 $\Rightarrow \begin{cases} \text{領導係數}-2<0\text{（顯然成立）} \\ D=3^2-4\times(-2)(-k)<0 \Rightarrow 9-8k<0 \Rightarrow k>\dfrac{9}{8} \end{cases}$

12. $f(x)=-2x^2+3x-k$ （ k 為實數），若 $f(x)\geq 0$ 無解，求 k 的範圍為____________．

解答 $k>\dfrac{9}{8}$

解析 $f(x)\geq 0$ 無解 $\Rightarrow$ 沒有 x 會使得 $f(x)\geq 0$

$\Rightarrow$ 所有 x 會使得 $f(x)<0$

$\Rightarrow$ $f(x)<0$ 恆成立

$\Rightarrow$ $D=3^2-4\times(-2)\times(-k)<0$

$\Rightarrow$ $k>\dfrac{9}{8}$

13.設 $g(x+6)=f(x)$ 且 $f(x)=\begin{cases} |2x-3|\text{，}x<1 \\ x^2+x-5\text{，}1\leq x<9 \\ -2x+1\text{，}x\geq 9 \end{cases}$，則 $g(f(2))=$____________．

解答 13

解析 $f(2)=2^2+2-5=1$

$g(f(2))=g(1)=g(-5+6)=f(-5)=|2\times(-5)-3|=13$

14.(1) $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 時，有最小值 $-\dfrac{1}{a}$，則 $(a,\ b)=$____________．

(2)將此二次函數向上平移 3 單位，向左平移 2 單位，所得新方程式為____________．

解答 (1) $(1,\ -2)$;(2) $y=(x+1)^2+2$

解析 (1) $y=a(x-1)^2-\dfrac{1}{a}$ 且 $a>0$

$$\Rightarrow\ y=ax^2-2ax+a-\frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a-\dfrac{1}{a}=0 \end{cases} \Rightarrow a=\pm 1\text{（負不合）} \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=-2$$

$\therefore (a,\ b)=(1,\ -2)$

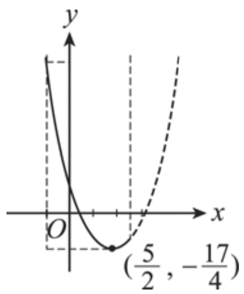
(2) $y=(x-1)^2-1$ 平移 $(-2,\ 3)$ ，得 $y-3=(x+2-)^2-1 \Rightarrow \quad y=(x+1)^2+2$

15.設 $-1\le x\le 3$， $f(x)=x^2-5x+2$ 的最大值 M ，此時 x 值為 a ， $f(x)$ 的最小值 m ，此時 x 值為 b ，則

(1) $(a,\ M)=$____________ . (2) $(b,\ m)=$____________ .

解答 (1) $(-1,\ 8)$;(2) $(\frac{5}{2},\ -\frac{17}{4})$

解析 $f(x)=x^2-5x+2=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{17}{4}$



x	-1	3
$f(x)$	8	-4

圖形如右：

(1)當 $x=-1$， $f(x)$ 有最大值 8，故 $(a,\ M)=(-1,\ 8)$

(2)當 $x=\frac{5}{2}$ 時， $f(x)$ 有最小值 $-\frac{17}{4}$ ，故 $(b,\ m)=(\frac{5}{2},\ -\frac{17}{4})$

16.某次考試分數普遍不理想，但因為大家平常都很努力，許老師想用一個線型函數，將原本最低 30 分調高成 60 分，原本最高 60 分調高為 100 分，求 (1)此線型函數 $f(x)=$____________ . (2)原本 42 分調整後成為__________分 .

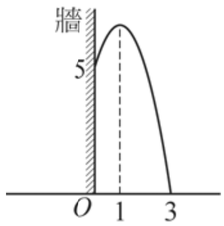
解答 (1) $\frac{4}{3}x+20$;(2)76

解析 (1)設此線型函數 $f(x)=ax+b$ 由題意知 $f(30)=60$

$f(60)=100 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{4}{3}$， $b=20 \quad \therefore\ f(x)=\frac{4}{3}x+20$

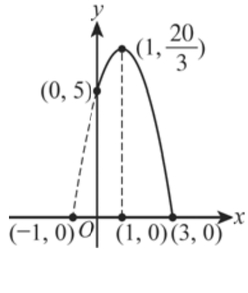
(2) $f(42)=\frac{4}{3}\times 42+20=76$

17.在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗口，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如下圖；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高度高出____________公尺 .



解答 $\frac{5}{3}$

解析 建立坐標系如圖 $\Rightarrow$ 交 x 軸於(3，0)，(− 1，0)



設 $y=a(x-3)(x+1)$，$a<0$，又過(0，5)

$\therefore \quad 5=a(-3)(1) \qquad \therefore \quad a=-\frac{5}{3} \Rightarrow \quad y=-\frac{5}{3}(x-3)(x+1)$

$x=1$ 代入 $\quad \therefore \quad y=-\frac{5}{3}\times(-2)\times 2=\frac{20}{3} \Rightarrow$ 可求 $=\frac{20}{3}-5=\frac{5}{3}$（公尺）

18.已知拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形經水平左移 2 單位，鉛直上移 5 單位後的頂點為(− 1，6)，且

過點(5，2)，則 $2b+c$ 之值為____________ .

解答 $\frac{4}{3}$

解析 利用反向思考 $\Rightarrow(-1,6)$經水平右移 2 單位，鉛直下移 5 單位後在 $y=ax^2+bx+c$ 上，

即 (1，1)為 $y=ax^2+bx+c$ 頂點

同理：(5，2)經水平右移 2 單位，鉛直下移 5 單位後在 $y=ax^2+bx+c$ 上，

即(7，−3)在 $y=ax^2+bx+c$ 上

設 $y=a(x-1)^2+1$，將(7，−3)代入

$$\therefore\ -3=a\times 36+1\ ,\ a=-\frac{1}{9}\Rightarrow\ y=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}$$

$$\therefore\ b=\frac{2}{9},\ c=\frac{8}{9}\ \Rightarrow\ 2b+c=\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=\frac{4}{3}$$

19.設 x，y 為實數，$2x-y=5$，則 x^2+y^2 的最小值為____________ .

解答 5

解析 $\because\ 2x-y=5\quad \therefore\ y=2x-5$

$\Rightarrow\ x^2+y^2=x^2+(2x-5)^2=5x^2-20x+25=5(x-2)^2+5$

$\therefore$ 當 $x=2$ 時，x^2+y^2 有最小值為 5

20.某電影院每張票價為 120 元，每場觀眾平均 500 人，若票價每減 5 元，每場觀眾就增加 50 人，則每張票價訂為____________元時，每場電影票價收入為最多 .

解答 85

解析 設票價減 x 元，可得收入 y 元為最多

則 $y=(120-x)(500+10x)=-10x^2+700x+60000=-10(x-35)^2+72250$

$\therefore$ 當 $x=35$ 時，$y=72250$ 為最大值，故每張票價應訂為 85 元

21.一果園中每單位面積種橘子樹 25 棵，每棵平均可收穫橘子 450 個，若每單位面積加種 1 棵橘子樹，則每棵平均收穫量少 12 個，則每單位面積應種植____________棵橘子樹時，可得最大收穫量 .

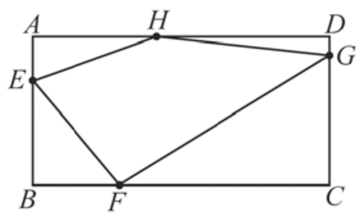
解答 31

解析 設每單位面積加種 x 棵，總產量為 y 個橘子

$$\Rightarrow\ y=(25+x)(450-12x)=-12(x-\frac{25}{4})^2+\frac{46875}{4}$$

$\because\ x\in\boldsymbol{N}\quad \therefore\ x=6$ 時，y 有最大值 $31\times 378=11718$（個）$\Rightarrow$ 所求$=25+6=31$

22.矩型 $ABCD$ 如下圖，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，若動點 E，F，G，H 分別在 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$ 上移動且 $\overline{AE}:\overline{BF}:\overline{CG}:\overline{DH}=1:2:3:4$，則四邊形 $EFGH$ 之最小面積為____________ .



解答 $\frac{47}{48}$

解析 設 $\overline{AE}=x\quad \because\ \overline{AE}:\overline{BF}:\overline{CG}:\overline{DH}=1:2:3:4$

$\therefore\ \overline{BF}=2x$，$\overline{CG}=3x$，$\overline{DH}=4x$

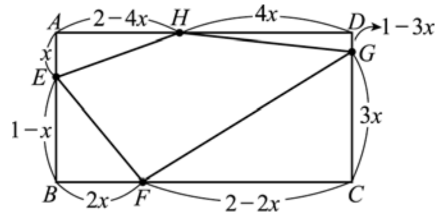
$\therefore\ \overline{EB}=1-x$，$\overline{CF}=2-2x$，$\overline{DG}=1-3x$，$\overline{AH}=2-4x$

$\Rightarrow$ 四邊形 $EFGH$ 面積= 矩形 $ABCD-\triangle AEH-\triangle BEF-\triangle CFG-\triangle DGH$

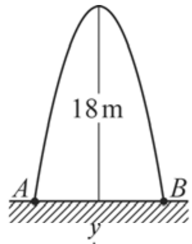
$$=1\times 2-\frac{1}{2}\times x\times(2-4x)-\frac{1}{2}(1-x)(2x)-\frac{1}{2}\times(2-2x)\times 3x-\frac{1}{2}\times(1-3x)(4x)$$

$= 12x^2 - 7x + 2 = 12(x - \frac{7}{24})^2 + \frac{47}{48}$

$\therefore$ 當 $x = \frac{7}{24}$ 時，有最小面積 $\frac{47}{48}$



23.若雪山隧道入口的建造為一拋物線圖形，地面 $\overline{AB}$ 寬為 12 公尺，隧道正中央高度為 18 公尺，試問地面上距洞口 A 點 4 公尺處的高度為＿＿＿＿＿＿公尺．



解答 16

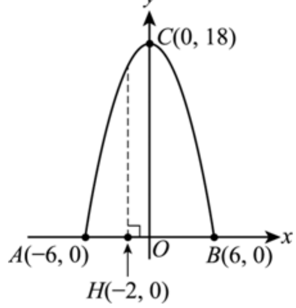
解析 建立坐標系如圖，$A(-6, 0)$，$B(6, 0)$，$C(0, 18)$

設 $y = f(x) = ax^2 + 18$，$a < 0$

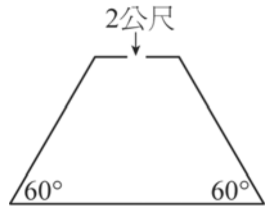
過$(6, 0)$　$\therefore$　$0 = a \times 36 + 18$　$\therefore$　$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow$　$y = -\frac{1}{2}x^2 + 18$

又距 A 點 4 公尺處的點 $H(-2, 0)$

$x = -2$ 代入　$\therefore$　$y = -\frac{1}{2} \times 4 + 18 = 16$，即所求高度為 16 公尺



24.一農夫想用 70 公尺長之竹籬圍成一底角為 60°的等腰梯形菜圃，並在其中上底正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示．問此農夫所能圍成的最大面積為＿＿＿＿＿＿平方公尺．



解答 $162\sqrt{3}$

解析 令 $\overline{BG} = \overline{CH} = x$（$\because$　$ABCD$ 為等腰梯形）

$\Rightarrow$　$\overline{AG} = \overline{DH} = \sqrt{3}x$，$\overline{AB} = \overline{CD} = 2x$（$\because$　$\angle ABG = 60°$）

$\Rightarrow$　$\overline{GH} = \frac{1}{2}[(70 + 2) - 2(x + 2x)] = 36 - 3x$

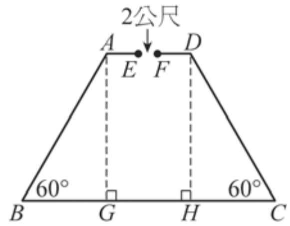
$\therefore$　$\overline{BC} = (36 - 3x) + 2x = 36 - x$

$\therefore$　梯形面積$= \frac{1}{2}[(36 - 3x) + (36 - x)] \times \sqrt{3}x$

$= \sqrt{3}(36 - 2x) \times x = \sqrt{3}(-2x^2 + 36x)$

$= -2\sqrt{3}[(x - 9)^2 - 81]$

$\Rightarrow$　當 $x = 9$ 時有最大面積$= (-2\sqrt{3})(-81) = 162\sqrt{3}$



25.假設 $f(x) = -x^2 + ax + b$ 的最大值為 9，且其圖形與 x 軸交於 A，B 二點，且頂點為 C，則△ABC 的面積為＿＿＿＿＿＿．

解答 27

解析 $f(x) = -x^2 + ax + b = -(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} + b$

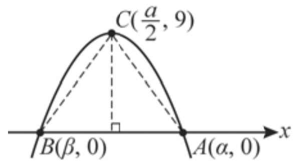
$\because$　最大值為 9　$\therefore$　$\frac{a^2}{4} + b = 9$　$\therefore$　$a^2 + 4b = 36$

又頂點 $C(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + b) = (\frac{a}{2}, 9)$

設 $A(\alpha,\ 0)$，$B(\beta,\ 0)$ $\Rightarrow$ α，β 表 $-x^2+ax+b=0$ 之二根 $\therefore$ $\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=-b$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2+4b}=\sqrt{36}=6$

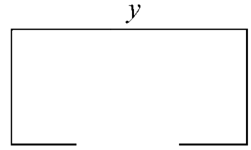
$\therefore$ $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$



26.一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如下圖示．此農夫所能圍成的最大面積為__________平方公尺．

解答 289

解析 如下圖，設長方形兩邊長 x 公尺，另兩邊長 y 公尺（含下方出入口 2 公尺）



則 $2x+2y-2=66$，即 $y=34-x$

由 $2<y<34$ 得 $0<x<32$

長方形面積 $=xy=x(34-x)=-(x^2-34x)=-(x-17)^2+289$

當 $x=17$ 時，長方形面積等於 289（平方公尺）最大

27.設 a 為實數，若 α，β 為二次方程式 $x^2+(a-1)x+(a-3)=0$ 的兩個根，則 (1)當 $a=$__________時，(2) $|\alpha-\beta|$ 有最小值為__________．

解答 (1)3;(2)2

解析 因 α，β 為 $x^2+(a-1)x+(a-3)=0$ 兩根，所以 $\begin{cases}\alpha+\beta=-(a-1)\\ \alpha\beta=a-3\end{cases}$，

又判別式為 $(a-1)^2-4(a-3)=a^2-6a+13=(a-3)^2+4>0$，故 α，β 為實根，

所以 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=[-(a-1)]^2-4(a-3)=(a-3)^2+4$，

故當 $a=3$ 時，$|\alpha-\beta|$ 有最小值為 $\sqrt{4}=2$．