高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：99.09.15					
範圍	1-1 實數	班級		姓名	
		座號			

一、單選題（ 每題 5 分 ）

（　　）1.設 a，b，c，$d \in R$，若 $a<b$，$c<d$，則下列敘述何者正確?

(1) $a-c<b-d$　(2) $ac<bd$　(3) $bd<ac$　(4) $ad<bc$　(5) $a+c<b+d$

解答　5

解析　(1)若 $a=-1$，$b=0$，$c=-3$，$d=-2$，則 $a<b$，$c<d$

$a-c=-1-(-3)=2$，$b-d=0-(-2)=2$　∴　$a-c<b-d$ 不成立

(2)同(1)，$ac=(-1)\cdot(-3)=3$，$bd=0\cdot(-2)=0$　∴　$ac<bd$ 不成立

(3)若 $a=-1$，$b=0$，$c=1$，$d=2$，則 $a<b$，$c<d$

$bd=0\cdot 2=0$，$ac=(-1)\cdot 1=-1$　∴　$bd<ac$ 不成立

(4)同(1)，$ad=(-1)\cdot(-2)=2$，$bc=0\cdot(-3)=0$　∴　$ad<bc$ 不成立

(5)若 $a<b$，$c<d$，則 $a+c<b+d$ 恆成立

（　　）2.設 a，b，c，$d \in \boldsymbol{R}$，則下列敘述何者正確?

(1)若 $\frac{a}{b}>1$，則 $a>b$　　(2)若 $a>b$，$ab\neq 0$，則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(3)若 $a>b$，$c>d$，則 $a-c>b-d$　(4)若 $a>b$，$c>d$，則 $ac>bd$

(5)若 $a<x<b$，$c<y<d$，則 $a-d<x-y<b-c$

解答　5

解析　(1)當 $b<0$ 時，由 $\frac{a}{b}>1$　$\Rightarrow$　$a<b$

(2)①當 $ab>0$ 時，$a>b$　$\Leftrightarrow$　$a(\frac{1}{ab})>b(\frac{1}{ab})$　$\Leftrightarrow$　$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$　$\Leftrightarrow$　$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

②當 $ab<0$ 時，$a>b$　$\Leftrightarrow$　$a(\frac{1}{ab})<b(\frac{1}{ab})$　$\Leftrightarrow$　$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$　$\Leftrightarrow$　$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

(3)不一定，例：若 $a=3$，$b=2$，$c=-1$，$d=-3$，則 $a-c=4<b-d=5$

(4)不一定，例：若 $a>0$，$b<0$ 且 $c<0$，$d<0$，則 $ac<0$，$bd>0$　∴　$ac<bd$

(5)由 $c<y<d$　$\Rightarrow$　$-c>-y>-d$，而 $b>x>a$　∴　$b-c>x-y>a-d$

（　　）3.若 $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{5-b}$ 的值為

(1) $\frac{6}{7}$　(2) $\frac{4}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) 2　(5) 3

解答　1

解析　$\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=3-\sqrt{2}=1.\sim$

$a=1$，一個數減去整數部分就是小數部分 $\Rightarrow b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{5-b}=\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{6}{7}$$

（　　）4.下列何者為真?

(1)無理數與無理數之和必為無理數　(2)無理數與無理數之積必為無理數
(3)有理數與無理數之積必為無理數　(4)有理數與無理數之和必為無理數
(5)以上皆非

解答　4

解析　(1)╳；例：$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\boldsymbol{Q}$
(2)╳；例：$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in\boldsymbol{Q}$
(3)╳；例：$0\times\sqrt{2}=0\in\boldsymbol{Q}$
(4)○

(　　　)5.若分數$\dfrac{315a21}{24}$可化為有限小數，則 a 之值有幾組解?

(1) 4　(2) 5　(3) 6　(4) 7　(5)無限多組

解答　1

解析　若$\dfrac{b}{a}$為有限小數，則 a 只能有 2 或 5 的質因數

$\because$　$24=3\times2^3$　　$\therefore$　$\dfrac{315a21}{24}$為有限小數　$\Rightarrow$　3 整除 $315a21$

$\Rightarrow$　$3+1+5+a+2+1=12+a$ 為 3 的倍數　　$\therefore$　a 可為 0，3，6，9 共 4 個

(　　　)6.設 x 為正整數，將$\sqrt{x}$的整數部分以 $f(x)$表示，則 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)$之值為
(1) 621　(2) 622　(3) 623　(4) 624　(5) 625

解答　5

解析　整數部分 $=1$ 者有$\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$共 3 個，

整數部分 $=2$ 者有$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$共 5 個

⋮　　　⋮

依此類推，則所求 $=1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+9\times19+10\times1$

$=3+10+21+36+55+78+105+136+171+10=625$

(　　　)7.介於$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$與$\dfrac{11}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$之間的整數共有幾個?　(1) 3　(2) 4　(3)5　(4) 6　(5) 7

解答　2

解析　$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=1.\sim$，$\dfrac{11}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}}=\dfrac{11}{\sqrt{13-2\sqrt{12}}}=\dfrac{11}{\sqrt{12}-1}=\sqrt{12}+1=4.\sim$
則介於 $2-\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{12}+1$ 之間的整數為 1，2，3，4 共 4 個

(　　　)9.設 $a=\sqrt{5+\sqrt{31}}$，則 a 之值在哪兩個連續整數之間？

(1) 0 與 1　(2) 1 與 2　(3) 2 與 3　(4) 3 與 4　(5) 4 與 5．

解答　4

解析　由 $5<\sqrt{31}<6$，得 $10<5+\sqrt{31}<11$，因此 $3<\sqrt{10}<\sqrt{5+\sqrt{31}}<\sqrt{11}<4$．

二、填充題 (每題 10 分)

1.設 x，$y\in\boldsymbol{R}$ 且$(2x+3y)^2+(4x-y-1)^2=0$，則 $x+y=$______________ .

解答 $\dfrac{1}{14}$

解析 a,b 為實數，若 $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$

$$\begin{cases}2x+3y=0\\4x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{14}\\y=-\dfrac{1}{7}\end{cases}\Rightarrow x+y=\dfrac{1}{14}$$

2.x，$y\in\boldsymbol{R}$，且 $x^2+4xy+5y^2-2x-8y+5=0$，則數對$(x,y)=$______________ .

解答 $(-3,2)$

解析 先對 x 作配方

原式 $\Rightarrow$ $[x^2+2(2y-1)x+(2y-1)^2]+(5y^2-8y+5)-(2y-1)^2=0$

$\Rightarrow$ $[x+(2y-1)]^2+(y^2-4y+4)=0$ $\Rightarrow$ $(x+2y-1)^2+(y-2)^2=0$

$\begin{cases}x+2y-1=0\\y-2=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$，即數對$(x,y)=(-3,2)$

3.設 a，b 為有理數且滿足$(4a+3b)+3\sqrt{3}=1+(2a-6b)\sqrt{3}$，則 $a+b$ 的值為______________ .

解答 $\dfrac{1}{6}$

解析 $(4a+3b)+3\sqrt{3}=1+(2a-6b)\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}4a+3b=1\\2a-6b=3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$，$a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1}{3}=\dfrac{1}{6}$

4.把循環小數 $8.15\overline{374}$ 化為最簡分數得______________ .

解答 $\dfrac{814559}{99900}$

解析 設 $r=8.15\overline{374}$，則 $100000r=815374.\overline{374}=815374+0.\overline{374}$，

$$100r=815.\overline{374}=815+0.\overline{374}$$

二式相減 $\Rightarrow$ $100000r-100r=815374-815$ $\Rightarrow$ $99900r=814559$ $\therefore$ $r=\dfrac{814559}{99900}$

5.設 $\sqrt{4+2\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}=a+b$，$a\in Z$，$0\le b<1$，則數對$(a,b)=$______________ .

解答 $(3,\sqrt{2}-1)$

解析 由最內層多次雙重根號化簡

$$a+b=\sqrt{4+2\sqrt{3+2\sqrt{5+12(\sqrt{2}+1)}}}=\sqrt{4+2\sqrt{3+2\sqrt{17+2\sqrt{72}}}}=\sqrt{4+2\sqrt{3+2(3+2\sqrt{2})}}$$

$$=\sqrt{4+2(2\sqrt{2}+1)}=2+\sqrt{2}=3+(\sqrt{2}-1)\quad\therefore\quad a=3,\ b=\sqrt{2}-1$$

6.x，$y\in\boldsymbol{R}$，$-2\le x\le 5$，$1\le y\le 3$，令 $\dfrac{x}{y}$ 之最小值為 c，最大值為 d，則 $c+d=$______________ .

解答 3

解析 $-2\le x\le 5$,

$1\le y\le 3 \Rightarrow \frac{1}{3}\le\frac{1}{y}\le 1$

比較兩端 4 個乘積大小 $(-2)\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$; $(-2)\times 1=-2$; $5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$; $5\times 1=5$;

$\therefore\quad -2\le\frac{x}{y}\le 5\quad\Rightarrow\quad c=-2$, $d=5$

7.求介於$\frac{1}{8}$與$\frac{1}{7}$之間的有理數形如$\frac{k}{280}$（$k\in\boldsymbol{N}$）者共有__________個．

解答 4

解析 $\frac{1}{8}<\frac{k}{280}<\frac{1}{7}$ 通分 $\Rightarrow$ $\frac{35}{280}<\frac{k}{280}<\frac{40}{280}$，$k\in\boldsymbol{N}$ $\therefore$ $k=36$，37，38，39 共 4 個

8.化簡下列各式：

(1) $2\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{48}=$_________．(2) $\sqrt{24}-\sqrt{3}(\sqrt{18}+\sqrt{6})=$__________．

(3) $(\sqrt{12}-\sqrt{18})^2=$__________．

解答 (1) $\sqrt{3}$;(2) $-\sqrt{6}-3\sqrt{2}$;(3) $30-12\sqrt{6}$

解析 (1) $2\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+\sqrt{9\times 3}-\sqrt{16\times 3}=2\sqrt{3}+\sqrt{9}\times\sqrt{3}-\sqrt{16}\times\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{24}-\sqrt{3}(\sqrt{18}+\sqrt{6})=\sqrt{24}-\sqrt{54}-\sqrt{18}=\sqrt{4\times 6}-\sqrt{9\times 6}-\sqrt{9\times 2}$

$=2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-3\sqrt{2}=-\sqrt{6}-3\sqrt{2}$

(3) $(\sqrt{12}-\sqrt{18})^2=(\sqrt{12})^2-2\times\sqrt{12}\times\sqrt{18}+(\sqrt{18})^2=12-2\times\sqrt{4\times 3}\times\sqrt{9\times 2}+18$

$=12-2\times 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}+18=30-12\sqrt{6}$

9.化簡 (1) $\sqrt{4+\sqrt{12}}=$___________．(2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=$___________．

解答 (1) $\sqrt{3}+1$;(2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

解析 (1) $\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+1+2\sqrt{3\times 1}}=\sqrt{3}+1$

(2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

10.設 $a=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$， $b=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$，則

(1) $a\cdot b=$___________．(2) $x=a+b$，則 $x^3-3x=$___________．

解答 (1)1;(2) $2\sqrt{5}$

解析 (1) $ab=\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt[3]{5-4}=\sqrt[3]{1}=1$

(2) $x^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}+2)+3\times1\times x$

$\Rightarrow\ x^3-3x=2\sqrt{5}$

11.設 x，y，z 為整數，若 $2|x|+|y+1|+3|z-3|=1$，則數對$(x，y，z)=$____________ .

解答 (0，0，3)或(0，－2，3)

解析 由整數的離散性知：若 a，$b\in\boldsymbol{Z}$ 且 $a\neq b$ ，則$|a-b|\geq1$，

依題意 $\Rightarrow$ $|x|=0$，$|y+1|=1$，$|z-3|=0$ $\therefore$ $x=0$，$y=0$ 或-2，$z=3$

即$(x，y，z)=(0，0，3)$，$(0，-2，3)$

12.有一最簡分數,其分子、分母之和為 70,將其化為小數並四捨五入後為 0.6,則此分數為_________.

解答 $\dfrac{27}{43}$

解析 設此分數為 $\dfrac{70-x}{x}$ ，$x\in\boldsymbol{N}$，$70-x\in\boldsymbol{N}$ 且$(x，70-x)=1$ 即互質

四捨五入後 $\dfrac{70-x}{x}\doteq0.6\Rightarrow$ $0.55\leq\dfrac{70-x}{x}<0.65$ $\Rightarrow$ $\dfrac{11}{20}\leq\dfrac{70-x}{x}<\dfrac{13}{20}$

分子分母同乘以 $20x>0\Rightarrow11x\leq20(70-x)<13x$

$\Rightarrow$ $11x\leq20(70-x)$且 $20(70-x)<13x$（$\because$ $x>0$）

$\Rightarrow x\leq\dfrac{1400}{31}$ 且 $x>\dfrac{1400}{33}\Rightarrow$ $\dfrac{1400}{33}<x\leq\dfrac{1400}{31}$ $\therefore$ $x=43$，44 或 45

$\Rightarrow$ 此分數為 $\dfrac{27}{43}$ 或 $\dfrac{26}{44}$ 或 $\dfrac{25}{45}$

（不合）（不合）

13.設 $x\in\boldsymbol{N}$，若 $\sqrt{3}$ 介於 $\dfrac{x+5}{x}$ 與 $\dfrac{x+6}{x+1}$ 之間，則 x 之值為____________ .

解答 6

解析 $\because$ 化為帶分數 $\dfrac{x+5}{x}=1+\dfrac{5}{x}$， $\dfrac{x+6}{x+1}=1+\dfrac{5}{x+1}$ 且 $x\in\boldsymbol{N}$

$\therefore$ $1+\dfrac{5}{x+1}<\sqrt{3}<1+\dfrac{5}{x}$ $\Rightarrow$ $0<\dfrac{5}{x+1}<\sqrt{3}-1<\dfrac{5}{x}\Rightarrow\dfrac{x+1}{5}>\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}>\dfrac{x}{5}$

去分母$\Rightarrow\dfrac{x+1}{5}>\dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}>\dfrac{x}{5}$(倒數改變開口方向)

$\Rightarrow2x+2>5\sqrt{3}+5>2x$

又 $5\sqrt{3}+5=\sqrt{75}+5=8.\sim+5=13.\sim$ $\Rightarrow2x+2>13.\sim>2x$ $\therefore$ $x=6$

14.化簡下列各式：

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\sqrt{\dfrac{1}{27}}-\sqrt{\dfrac{1}{48}}=$____________ . (2) $\sqrt{24}-\sqrt{3}(\sqrt{18}+\sqrt{6})=$____________ .

(3) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$_____________. (4) $(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}})^2+(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+1})^2=$_____________.

解答 (1) $\dfrac{13}{36}\sqrt{3}$;(2) $-\sqrt{6}-3\sqrt{2}$;(3) $4-\sqrt{15}$;(4) $20-\dfrac{40}{3}\sqrt{2}$

解析 (1)原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}=\sqrt{3}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{12})=\dfrac{13}{36}\sqrt{3}$.

(2)原式 $=2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-3\sqrt{2}=-\sqrt{6}-3\sqrt{2}$.

(3)原式 $=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$.

(4)原式 $=\dfrac{2}{3(1+\sqrt{2})^2}+\dfrac{6}{(\sqrt{2}+1)^2}=\dfrac{2+6\times3}{3(1+\sqrt{2})^2}=\dfrac{20}{3(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{20(3-2\sqrt{2})}{3(9-8)}=20-\dfrac{40}{3}\sqrt{2}$.

15. 設 $-\dfrac{2}{7}<x<\dfrac{6}{7}$，化簡 $\sqrt{(7x+2)^2}+\sqrt{(7x-6)^2}=$_____________.

解答 8

解析 當 $-\dfrac{2}{7}<x<\dfrac{6}{7}$ 時，$-2<7x<6$，故 $7x+2>0$ 且 $7x-6<0$，

原式= $|7x+2|+|7x-6|=7x+2-(7x-6)=8$.

16.設 $x\in\boldsymbol{N}$，若 $\sqrt{3}$ 介於 $\dfrac{x+5}{x}$ 與 $\dfrac{x+6}{x+1}$ 之間，則 x 之值為_____________.

解答 6

解析 同第 13 題

17.x，$y\in\boldsymbol{Z}$，且 $x^2+4xy+5y^2-2x-8y+4=0$，則 $x-y$ 的最小值 =_____________.

解答 -8

解析 先對 x 作配方

原式 $\Rightarrow$ $[x^2+2(2y-1)x+(2y-1)^2]+(5y^2-8y+4)-(2y-1)^2=0$

$[x+(2y-1)]^2+(y^2-4y+4)=1$ $\Rightarrow$ $(x+2y-1)^2+(y-2)^2=1$，其中 x，$y\in\boldsymbol{Z}$

$x+2y-1$	1	-1	0	0
$y-2$	0	0	1	-1

$\Rightarrow$

x	-2	-4	-5	-1
y	2	2	3	1

故當$(x,y)=(-5,3)$時，$x-y=-8$ 為最小值