3-1

A 基本能力題

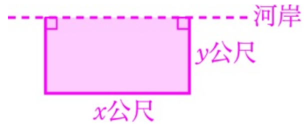
1. 設 $x>0$，$y>0$，$x+2y=3$，求 xy 的最大值，又此時 x，y 之值是多少？

解：由算幾不等式知 $\frac{x+2y}{2} \geq \sqrt{x \cdot 2y}$，即 $\frac{3}{2} \geq \sqrt{2xy}$，故 $xy \leq \frac{9}{8}$。

xy 的最大值是 $\frac{9}{8}$。此時，$x=2y=\frac{3}{2}$，得 $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{4}$。

2. 一條繩子長 60 公尺，沿筆直的河邊圍成一個長方形，河邊不必使用繩子，問這條繩子圍成的長方形最大面積是多少？

解：設長方形平行河岸的一邊長 x 公尺，垂直河岸的一邊長 y 公尺，



則 $x+2y=60$，由算幾不等式，$\frac{x+2y}{2} \geq \sqrt{x \cdot 2y}$，

即 $30 \geq \sqrt{2xy}$，故 $xy \leq 450$。xy 的最大值是 450。

即圍成的長方形最大面積是 450 平方公尺。

3. 已知 a，b，c 均為正實數，且 $a+b+c=1$，試求：

(1) $a^2+b^2+c^2$ 的最小值。 (2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值。

解：(1) 柯西不等式 $(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (a \cdot 1+b \cdot 1+c \cdot 1)^2$，

即 $(a^2+b^2+c^2) \cdot 3 \geq (a+b+c)^2=1$，故 $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$。

所以 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是 $\frac{1}{3}$。

(2) 柯西不等式

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right]$$

$$\geq\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}\right)^2,$$

即 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq 3^2$，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值是 9。

4. 設 x，y，z 為實數，且 $x+2y+z=6$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值，又此時 x，y，z 之值各是多少？

解：柯西不等式 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+1^2)\geq(x+2y+z)^2$，

即 $(x^2+y^2+z^2)\cdot 6\geq 36$，故 $x^2+y^2+z^2\geq 6$。

此時，$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=k$，即 $x=k$，$y=2k$，$z=k$。

代入 $x+2y+z=6$，得 $6k=6$，故 $k=1$。$x=1$，$y=2$，$z=1$。

$x^2+y^2+z^2$ 的最小值是 6。

5. 設 a，b，c 為實數，且 $a+b+c=0$，試證：$2^a+2^b+2^c\geq 3$。

證明：算幾不等式 $\frac{2^a+2^b+2^c}{3}\geq\sqrt[3]{2^a\cdot 2^b\cdot 2^c}$，

即 $2^a+2^b+2^c\geq 3\sqrt[3]{2^{a+b+c}}=3\cdot 1=3$。

B　挑戰題

1. 設 x，y 均為正數，且 $xy^3=16$，求 $x+3y$ 的最小值，又此時 x，y 之值各是多少？

解：算幾不等式 $\dfrac{x+y+y+y}{4} \geq \sqrt[4]{x\cdot y^3}$，

即 $x+3y \geq 4\sqrt[4]{16}=8$，$x+3y$ 的最小值是 8。此時 $x=y=2$。

2. 關於下面的題目：設 a，b 為正數，求 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{9}{a}+b\right)$ 的最小值。

阿榮的解法是：

由算幾不等式知

$$a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}}\ ;\ \frac{9}{a}+b \geq 2\sqrt{\frac{9}{a}\cdot b}=2\sqrt{\frac{9b}{a}}\ ,$$

所以 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{9}{a}+b\right) \geq \left(2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(2\sqrt{\dfrac{9b}{a}}\right)=4\cdot3=12$。

於是阿榮回答：$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{9}{a}+b\right)$ 的最小值是 12。

阿財的解法是：

由柯西不等式知

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{9}{a}+b\right)=\left[(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2\right]\left[\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^2+(\sqrt{b})^2\right]$$

$$\geq (3+1)^2=16。$$

於是阿財回答：$(a+\frac{1}{b})(\frac{9}{a}+b)$ 的最小值是 16。

你認為誰的答案是正確的，為什麼？

解：阿財的答案是正確的。

就阿榮的解法而言，

當 $(a+\frac{1}{b})(\frac{9}{a}+b)=12$ 時，則 $a=\frac{1}{b}$ 且 $\frac{9}{a}=b$，得 $ab=1$ 且 $ab=9$，矛盾。

就阿財的解法而言，

當 $(a+\frac{1}{b})(\frac{9}{a}+b)=16$ 時，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\frac{3}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{b}}}{\sqrt{b}}$，即 $\frac{a}{3}=\frac{1}{b}$，得 $ab=3$。

即若 $ab=3$，則 $(a+\frac{1}{b})(\frac{9}{a}+b)$ 有最小值 16。

3. 某奶粉工廠欲訂購一批體積固定的圓柱體鐵罐，問應如何設計才最節省材料？

解：設圓柱體鐵罐的底面半徑是 r，高是 h，

則體積 $V=\pi r^2h$，表面積 $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\pi rh+\pi rh$。

由算幾不等式知

$$\frac{2\pi r^2+\pi rh+\pi rh}{3}\geq\sqrt[3]{2\pi r^2+\pi rh+\pi rh}=\sqrt[3]{2\pi^3r^4h^2}$$

$$=\sqrt[3]{2\pi(\pi r^2h)^2}=\sqrt[3]{2\pi V^2},$$

當 $2\pi r^2=\pi rh$ 時，表面積 S 最小值為 $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$，

即當 $r=\frac{h}{2}$（半徑為高的一半），最節省材料。

4. 試證：周長為定值的三角形中，以正三角形的面積最大。

〔提示：設三角形三邊長為 a，b，c，且 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則其面積為

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，考慮 $s-a$，$s-b$，$s-c$ 三數的算幾不等式。〕

證明：設三角形三邊長分別為 a，b，c，且 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

由海龍公式知,此三角形的面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

由算幾不等式知 $\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$，

$(\because 3s-a-b-c=\frac{3}{2}[a+b+c]-a-b-c=\frac{1}{2}[a+b+c])$

即 $\frac{s}{3}\geq\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$，

$\frac{s^3}{27}\geq(s-a)(s-b)(s-c)$，

故 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\leq\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$，

當此三角形面積最大時，$s-a=s-b=s-c$，即 $a=b=c$，即正三角形。

3-2

A 基本能力題

1. 試解下列各多項式不等式：

(1) $x^2-13x-30\le 0$。

(2) $(x-1)(2x+1)(x-2)>0$。

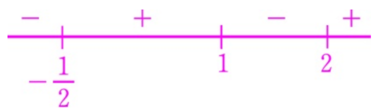
(3) $(x-3)(2x^2-x+1)(2x^2-x-1)\le 0$。

(4) $x^3-6x^2+11x-6>0$。

解：(1) $x^2-13x-30\le 0$，

$(x+2)(x-15)\le 0$，$-2\le x\le 15$。

(2) $(x-1)(2x+1)(x-2)>0$



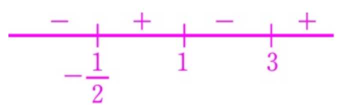
$-\frac{1}{2}<x<1$ 或 $x>2$。

(3) 由於 $2x^2-x+1=2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{7}{8}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$ 恆成立，

$(x-3)(2x^2-x+1)(2x^2-x-1)\le 0$，

$(x-3)(2x^2-x-1)\le 0$，

$(x-3)(2x+1)(x-1)\le 0$，

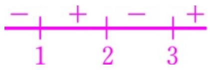


$x\le -\frac{1}{2}$ 或 $1\le x\le 3$。

(4) $x^3-6x^2+11x-6>0$，

$(x-1)(x-2)(x-3)>0$，

$1<x<2$ 或 $x>3$。



$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & +11 & -6 & 1 \\ & +1 & -5 & +6 & \\ \hline 1 & -5 & +6 & \boxed{+0} & \\ & +2 & -6 & & 2 \\ \hline 1 & -3 & \boxed{+0} & & \end{array}$$

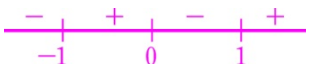
2. 試解下列各分式不等式：

(1) $\dfrac{4x+1}{3x-2}\leq 1$。　　(2) $\dfrac{1}{x}<x$。

解：(1) $\dfrac{4x+1}{3x-2}\leq 1$，$\dfrac{4x+1}{3x-2}-1\leq 0$，$\dfrac{x+3}{3x-2}\leq 0$

$(x+3)(3x-2)\leq 0$，但 $3x-2\neq 0$，故 $-3\leq x<\dfrac{2}{3}$。

(2) $\dfrac{1}{x}<x$，$\dfrac{1}{x}-x<0$，$\dfrac{x^2-1}{x}>0$



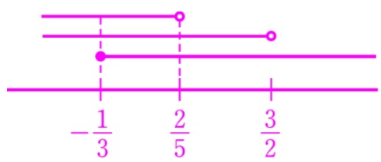
即 $x(x^2-1)>0$，$x(x+1)(x-1)>0$，故得 $-1<x<0$ 或 $x>1$。

3. 試解下列各根式不等式：

(1) $\sqrt{3x+1}<\sqrt{3-2x}$。　　(2) $\sqrt{x^2+3x-4}>x+1$。

解：(1) $\sqrt{3x+1}<\sqrt{3-2x}$，

$$\begin{cases} 3x+1\geq 0\,, \\ 3-2x>0\,, \\ 3-2x>3x+1\,。 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{3}\,, \\ x<\dfrac{3}{2}\,, \\ x<\dfrac{2}{5}\,。 \end{cases}$$



取共同部分得其解為 $-\dfrac{1}{3}\leq x<\dfrac{2}{5}$。

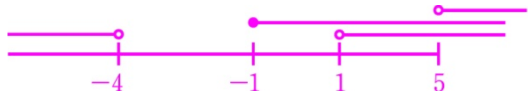
(2) $\sqrt{x^2+3x-4}>x+1$，

(i) $\begin{cases} x^2+3x-4\ge 0 \text{，} \\ x+1<0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (x+4)(x-1)\ge 7 \text{，} \\ x+1<0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x\le -4 \text{或} x\ge 1 \text{，} \\ x<-1 \end{cases}$

取共同部分得 $x\le -4$。

(ii) $\begin{cases} x^2+3x-4>0 \text{，} \\ x+1\ge 0 \text{，} \\ \sqrt{x^2+3x-4}>x+1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (x+4)(x-1)>0 \text{，} \\ x\ge -1 \text{，} \\ x>5 \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x<-4 \text{或} x>1 \text{，} \\ x\ge -1 \text{，} \\ x>5 \text{。} \end{cases}$

取共同部分得 $x>5$。



由(i)(ii)知原不等式的解為 $x\le -4$ 或 $x>5$。

4. 設 $f(x)=-2x^2+4x-1$，

(1) 若 x 為任意實數，求 $f(x)$ 的極值。

(2) 若 $2\le x\le 4$，求 $f(x)$ 的極值。

解：$f(x)=-2x^2+4x-1=-2(x^2-2x+1)+1=-2(x-1)^2+1$，

(1) 若 x 為任意實數，則當 $x=1$ 時，$f(x)$有最大值 1；而 $f(x)$沒有最小值。

(2) 若 $2\le x\le 4$，

當 $x=2$ 時，$f(x)$有最大值 -1，

當 $x=4$ 時，$f(x)$有最小值 -17。

5. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中 $1\le t\le 10$，則這段時間內該地區最大溫差是多少。

解：$f(t)=-t^2+10t+11=-(t-5)^2+36$，

因 $1\le t\le 10$，

當 $t=5$ 時，$f(t)$有最大值 36，

當 $t=10$ 時，$f(t)$有最小值 11。

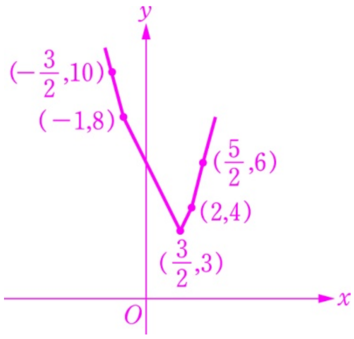
故最大溫差是 $36-11=25$。

6. 求函數 $f(x)=|x+1|+|2x-3|+|x-2|$的極值。

解：$f(x)=|x+1|+|2x-3|+|x-2|$，

列出 $-\frac{3}{2}$，-1，$\frac{3}{2}$，2，$\frac{5}{2}$的函數值如下：

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$f(x)$	10	8	3	4	6



將 $(-\frac{3}{2},10)$，$(-1,8)$，$(\frac{3}{2},3)$，$(2,4)$，$(\frac{5}{2},6)$各點，每相鄰兩點用線段連接，即得 $f(x)=|x+1|+|2x-3|+|x-2|$ 的折線圖形（如右圖）。

由圖形知 $f(x)$的最小值是 3，但沒有最大值。

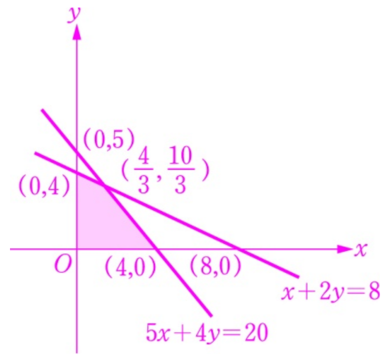
7. 若坐標平面上兩點 $A(2,-1)$ 與 $B(3,4)$ 在直線 $kx+y-5=0$ 的反側，求 k 的範圍。

解：因 $A(2,-1)$ 與 $B(3,4)$ 兩點在直線 $kx+y-5=0$ 的反側，

故 $(2k-1-5)(3k+4-5)<0$，即 $(2k-6)(3k-1)<0$，得$\frac{1}{3}<k<3$。

8. 試圖解二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+2y\le 8\,, \\ 5x+4y\le 20\,, \\ x\ge 0\,, \\ y\ge 0 \end{cases}$，並求此區域的面積。

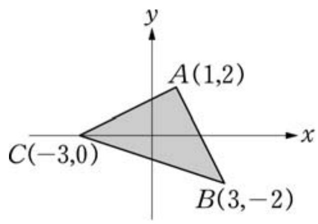
解：$\begin{cases} x+2y\le 8\,, \\ 5x+4y\le 20\,, \\ x\ge 0\,, \\ y\ge 0 \end{cases}$



圖解如右四邊形區域（含邊界）：

此四邊形區域的面積為$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & \frac{4}{3} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & 4 \end{vmatrix}$絕對值 $=\frac{28}{3}$。

9. 如右圖，設 $A(1,2)$，$B(3,-2)$，$C(-3,0)$，試以二元一次聯立不等式表示△ABC 的內部區域（含邊界）。



解：直線 AB 的方程式為 $y-2=-2(x-1)$，$2x+y-4=0$，

直線 BC 的方程式為 $y-0=-\frac{1}{3}(x+3)$，$x+3y+3=0$，

直線 CA 的方程式為 $y-0=\frac{1}{2}(x+3)$，$x-2y+3=0$，

由圖形知△ABC 內部區域（含邊界）為$\begin{cases} 2x+y-4\le 0\,, \\ x+3y+3\ge 0\,, \\ x-2y+3\ge 0。\end{cases}$

B 挑戰題

1. 設α，β是實係數二次方程式 $x^2-(k+2)x+(k^2-k+2)=0$ 的兩個實根，

求：(1) k 值的範圍。　　(2) $\alpha^2+\beta^2$ 的最大值與最小值。

解：(1) $\delta=(k+2)^2-4(k^2-k+2)\geq 0$，

$3k^2-8k+4\leq 0$，$(3k-2)(k-2)\leq 0$，$\frac{2}{3}\leq k\leq 2$。

(2) 根與係數 $\alpha+\beta=k+2$，$\alpha\beta=k^2-k+2$，

故 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(k+2)^2-2(k^2-k+2)$

$=-k^2+6k=-(k^2-6k+9)+9$

$=-(k-3)^2+9$。

當 $k=2$ 時，$\alpha^2+\beta^2$ 最大值是 8。

當 $k=\frac{2}{3}$ 時，$\alpha^2+\beta^2$ 最小值是 $\frac{32}{9}$。

2. 求函數 $f(x)=2(4^x+4^{-x})-5(2^x+2^{-x})$ 的最小值。

解：設 $2^x+2^{-x}=t$，$\Rightarrow \frac{2^x+2^{-x}}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=1$，則 $t\geq 2$。

且 $4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2=t^2$

故 $f(x)=2(4^x+4^{-x})-5(2^x+2^{-x})$

$=2〔(2^x+2^{-x})^2-2〕-5(2^x+2^{-x})$

$=2t^2-5t-4=2(t-\frac{5}{4})^2-\frac{57}{8}$。

當 $t=2$（即 $x=0$）時，$f(x)$ 有最小值 -6。

3. 設 x，y 為實數，且滿足 $x^2+4y^2=4$，試求 $2x^2+5y^2+6y+1$ 的極值。

解：由 $x^2+4y^2=4$ 得 $x^2=4-4y^2$，

故 $2x^2+5y^2+6y+1=2(4-4y^2)+5y^2+6y+1=-3y^2+6y+9$

$=-3(y^2-2y+1)+12=-3(y-1)^2+12$。

由 $x^2+4y^2=4 \Rightarrow 0 \le y^2 \le 1$，$-1 \le y \le 1$。

故當 $y=1$ 時，$2x^2+5y^2+6y+1$ 的最大值是 12。

當 $y=-1$ 時，$2x^2+5y^2+6y+1$ 的最小值是 0。

4. 設 $x-1$，x，$x+1$ 構成一鈍角三角形的三邊長，求 x 的範圍。

解：(i) 三角形三邊長為正數，故 $\begin{cases} x-1>0, \\ x>0, \\ x+1>0。\end{cases}$ 即 $x>1$。

(ii) 三角形任兩邊長之和必大於第三邊長，故 $x-1+x>x+1$，即 $x>2$。

(iii) 此三角形為鈍角三角形，

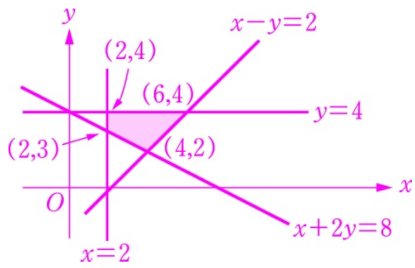
故 $(x+1)^2>x^2+(x-1)^2$，即 $x^2-4x<0$，$x(x-4)<0$ 得 $0<x<4$。

取 (i) (ii) (iii) 共同部分得 $2<x<4$。

3-3

A 基本能力題

1. 試在條件$\begin{cases} x \geq 2, \\ y \leq 4, \\ x - y \leq 2, \\ x + 2y \geq 8 \end{cases}$的限制下，求 $x+y$ 的最大值與最小值。



解：畫出$\begin{cases} x \geq 2, \\ y \leq 4, \\ x - y \leq 2, \\ x + 2y \geq 8 \end{cases}$的可行解區域如右：

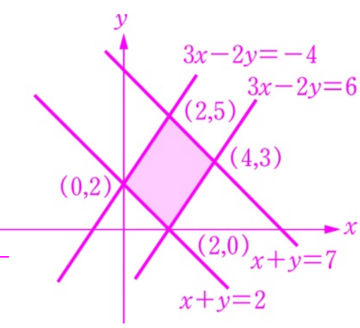
比較可行解區域頂點的目標函數值：

(x,y)	$(2,3)$	$(4,2)$	$(6,4)$	$(2,4)$
$x+y$	5	6	10	6

故 $x+y$ 的最大值是 10，最小值是 5。

2. 試在條件$\begin{cases} 2 \leq x + y \leq 7, \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 6 \end{cases}$的限制下，求 $2x+5y+1$ 的最大值與最小值。

解：畫出$\begin{cases} 2 \leq x + y \leq 7, \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 6 \end{cases}$的可行解區域如右：



比較可行解區域頂點的目標函數值：

(x,y)	$(0,2)$	$(2,0)$	$(4,3)$	$(2,5)$
$2x+5y+1$	11	5	24	30

故 $2x+5y+1$ 的最大值是 30，最小值是 5。

3. 有位農夫計畫種植小麥和玉米兩種農作物，他想要獲得最大的收益，依照過去的經驗：每公畝的小麥可以獲得 5000 元的收益，每公畝的玉米可以獲得 4500 元的收益，但每公畝的小麥需要 12 小時的農耕，每公畝的玉米需要 10 小時的農耕，而這位農夫現在有 80 公畝的土地和 900 小時的工作時間，由於土壤的特性和輪耕的制度，他決定今年至少要種 24 公畝的小麥。請問此農夫應該種多少公畝的小麥和多少公畝的玉米，才能獲得最多的收益？又收益最多為多少？

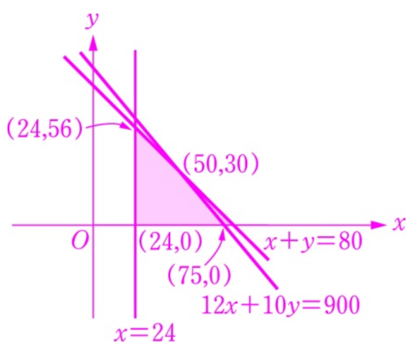
解：設種 x 公畝的小麥，y 公畝的玉米，

總收益為 $P=5000x+4500y$（元）。

依題意列出聯立不等式為

$$\begin{cases} x\ge 24, \\ y\ge 0, \\ x+y\le 80, \\ 12x+10y\le 900。\end{cases}$$

其可行解區域如右：



比較可行解區域頂點的目標函數值：

(x,y)	$(24,56)$	$(24,0)$	$(75,0)$	$(50,30)$
$P=5000x+4500y$	372000	120000	375000	385000

所以 $x=50$，$y=30$ 時，P 有最大值 385000，

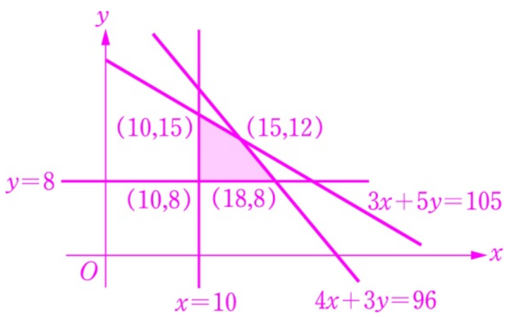
即此農夫應該種 50 公畝的小麥，30 公畝的玉米，才能獲得最多的收益；又收益最多為 385000 元。

4. 夏日育樂公司能製造木製搖搖椅和野餐桌，每張搖搖椅需要 3 公尺的木頭和 4 小時的工時；野餐桌需要 5 公尺的木頭和 3 小時的工時。現在公司擁有 105 公尺的木頭和每星期 96 小時的工時，而每張搖搖椅可獲利潤 700 元，每張野餐桌可獲利潤 600 元；由於競爭激烈，每星期至少要生產 10 張搖搖椅，8 張野餐桌。請問：每星期要製造多少張搖搖椅和多少張野餐桌，才能獲得最多的利潤？又最多利潤是多少？

解：設製造 x 張搖搖椅，y 張野餐桌，總利潤為 $P = 700x + 600y$ 元。

依題意聯立不等式為

$\begin{cases} x \geq 10, \\ y \geq 8, \\ 3x + 5y \leq 105, \\ 4x + 3y \leq 96。 \end{cases}$ 其可行解區域如右：



依題意知 x，y 必須為整數，可行解區域頂點皆為格子點，比較各頂點的目標函數值：

(x, y)	$(10, 8)$	$(18, 8)$	$(15, 12)$	$(10, 15)$
$P = 700x + 600y$	11800	17400	17700	16000

$x = 15$，$y = 12$ 時，P 有最大值 17700。

即每星期製造 15 張搖搖椅，12 張野餐桌，利潤最多；最多 17700 元。

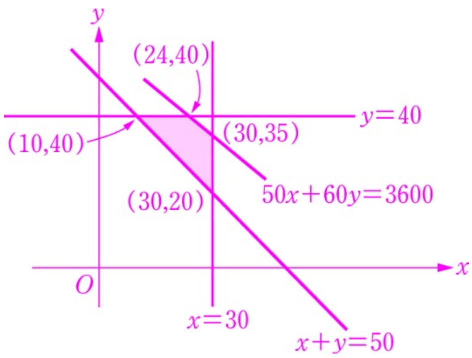
5. 超強電子公司在甲地和乙地生產電腦螢幕，在甲地製造的每台可獲利 2000 元，運費需要 50 元；在乙地製造的每台可獲利 1800 元，運費需要 60 元，甲地每星期至多生產 30 台，乙地每星期至多生產 40 台。現在公司接獲訂單，每星期至少需要運送 50 台螢幕，若在運費不得超過 3600 元的條件下，甲、乙兩地各需運送多少台，公司獲利最多？又最多獲利是多少？

解：設從甲地運送 x 台，從乙地運送 y 台，獲利 $P=2000x+1800y$ 元。

依題意聯立不等式為

$$\begin{cases} 0 \le x \le 30, \\ 0 \le y \le 40, \\ x+y \ge 50, \\ 50x+60y \le 3600。\end{cases}$$

其可行解區域如右：



依題意知 x，y 必須為整數，可行解區域頂點皆為格子點，比較各頂點的目標函數值：

(x, y)	$(10, 40)$	$(30, 20)$	$(30, 35)$	$(24, 40)$
$P=2000x+1800y$	92000	96000	123000	120000

$x=30$，$y=35$ 時，P 有最大值 123000。

即從甲地運送 30 台，從乙地運送 35 台，公司獲利最多；最多 123000 元。

6. <u>大盛紙業有限公司</u>有兩家工廠，第一廠生產 $A4$ 紙張 40 噸，第二廠生產 $A4$ 紙張 50 噸。今該公司自甲、乙兩家經銷商接獲訂單，甲經銷商申購 $A4$ 紙張 30 噸，乙經銷商申購 $A4$ 紙張 40 噸。如果自第一、二廠運送 $A4$ 紙張至甲、乙兩家經銷商每噸的運費如下表所示：

	甲經銷商	乙經銷商
第一廠	10 元	14 元
第二廠	12 元	15 元

請你（妳）幫該公司找出最佳方法（運費最低），以分配兩廠將 $A4$ 紙張運至甲、乙兩經銷商。

解：設第一廠運送 x 噸到甲經銷商，運送 y 噸到乙經銷商，

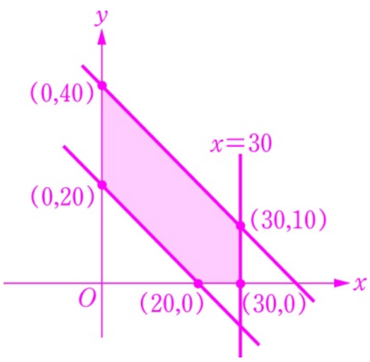
則第二廠運送（$30-x$）噸到甲經銷商，運送（$40-y$）噸到乙經銷商，

運費 $P=10x+14y+12(30-x)+15(40-y)$

$=-2x-y+960$，

依題意列出聯立不等式為

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 30, \\ 0\leq y\leq 40, \\ x+y\leq 40, \\ (30-x)+(40-y)\leq 50。\end{cases} \text{即} \begin{cases} 0\leq x\leq 30, \\ 0\leq y\leq 40, \\ x+y\leq 40, \\ x+y\geq 20。\end{cases}$$



其可行解區域如右：

比較可行解頂點的目標函數值：

(x,y)	$(20,0)$	$(30,0)$	$(30,10)$	$(0,40)$	$(0,20)$
$P=-2x-y+960$	920	900	890	920	940

$x=30$，$y=10$ 時，P 有最小值 890，

即第一廠運送 30 噸到甲經銷商，運送 10 噸到乙經銷商；

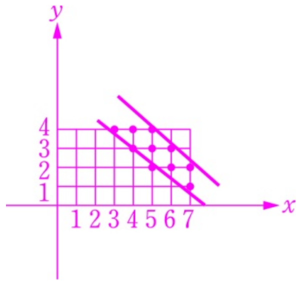
第二廠運送 30 噸到乙經銷商，所需運費最低。

B 挑戰題

1. 已知聯立不等式 $\begin{cases} 0\le x\le 7\text{，} \\ 0\le y\le 4\text{，} \\ x+y\le 9\text{，} \\ 4x+5y\ge 30\text{。} \end{cases}$ 若 x，y 均為整數，求

(1) 滿足此聯立不等式的 (x,y) 共有多少組解？

(2) $P=5x+8y$ 的最小值。



解：(1) $\begin{cases} 0\le x\le 7\text{，} \\ 0\le y\le 4\text{，} \\ x+y\le 9\text{，} \\ 4x+5y\ge 30\text{，} \\ x\text{，}y\in Z \end{cases}$ 的圖解為右圖區域的格子點：

由 $0\le x+y\le 9$ 與 $4x+5y\ge 30$，得 $6-\frac{4}{5}x\le y\le 9-x$，

又 $0\le x\le 7$，$0\le y\le 4$。故 x，y 之整數解列表如下：

x	3	4	5	6	7
y	4	3，4	2，3，4	2，3	1，2

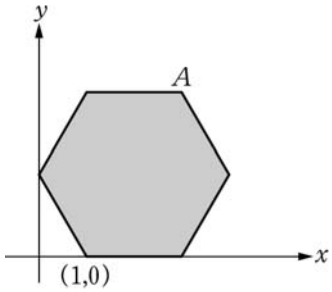
所以滿足此聯立不等式的 (x,y) 共有 10 組。

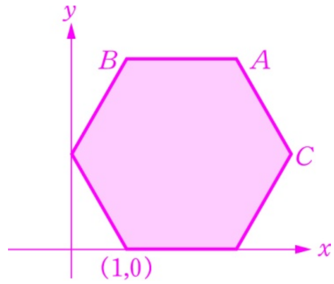
(2) 比較右列各組 (x,y) 的函數值

即可知 $P=5x+8y$ 的最小值是 41。

(x,y)	$(4,3)$	$(5,2)$	$(7,1)$
$P=5x+8y$	44	41	43

2. 設一線性規畫的可行解區域如右圖所示之正六邊形內部（含邊界），而目標函數為 $y-ax$；若已知 A 點為此目標函數取得最大值之唯一的點，則 a 值的範圍要有限制，若以不等式表示，求 a 之範圍。





解：$\overline{AB}$的斜率為 0，$\overline{AC}$的斜率為 $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$，

所以目標函數 $P=y-ax$ 的斜率 a 必須滿足

$-\sqrt{3}<a<0$，才能使得 A 點為此目標函數取得最大值的唯一點。

3. 為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A，至少 72 單位的營養素 B，至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料，

就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0$，$y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x，y 必須滿足的不等式組。

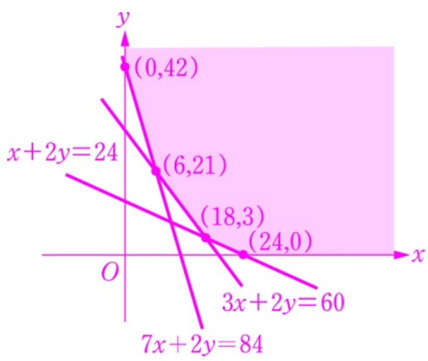
(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養需求，則 x，y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？

解：依題意列出下表：

營養素 \ 飼料	A	B	C	售價（元 / 公斤）
第一種（x 公斤）	7	3	3	5
第二種（y 公斤）	2	6	2	4

(1) $\begin{cases} 7x+2y \geq 84, \\ x+2y \geq 24, \\ 3x+2y \geq 60 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 7x+2y \geq 84, \\ x+2y \geq 24, \\ 3x+2y \geq 60, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$



作圖如右，並解得各交點坐標。

目標函數：$f(x, y) = 5x + 4y$。

(x, y)	$(0, 42)$	$(6, 21)$	$(18, 3)$	$(24, 0)$
$5x+4y$	168	114	102	120

當 $x = 18$，$y = 3$，最少成本為 102 元。

A 基本能力題

1. 設 x，y，z 均為正數，且 $3x+2y+z=6$，求 xyz 的最大值，又此時 x，y，z 之值各為何？

解：算幾不等式 $\dfrac{3x+2y+z}{3}\geq\sqrt[3]{(3x)(2y)z}$，

故 $\dfrac{6}{3}\geq\sqrt[3]{6xyz}$，$6xyz\leq 8$，即 $xyz\leq\dfrac{4}{3}$，所以 xyz 的最大值是 $\dfrac{4}{3}$。

此時 $3x=2y=z=2$，即 $x=\dfrac{2}{3}$，$y=1$，$z=2$。

2. 設 x，y，z 均為實數，且 $2x+2y+z=6$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值，又此時 x，y，z 之值各為何？

解：柯西不等式 $(x^2+y^2+z^2)(2^2+2^2+1^2)\geq(2x+2y+z)^2$，

故 $9(x^2+y^2+z^2)\geq 36$，即 $x^2+y^2+z^2\geq 4$，
$x^2+y^2+z^2$ 的最小值是 4。

此時 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$，令其比值為 k，

則 $x=2k$，$y=2k$，$z=k$，代入 $2x+2y+z=6$，得 $9k=6$，即 $k=\dfrac{2}{3}$，

於是 $x=\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{2}{3}$。

3. 證明下列各式：

(1) $\log_3 7+\log_7 3>2$。

(2) 若 a，b，c 為正數，則 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$。

證明：(1) 算幾不等式$\frac{\log_3 7+\log_7 3}{2}>\sqrt{(\log_3 7)(\log_7 3)}=1$ $(\log_3 7\neq\log_7 3)$，

故 $\log_3 7+\log_7 3>2$。

(2) <u>柯西</u>不等式 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

$=[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2][(\frac{1}{\sqrt{a}})^2+(\frac{1}{\sqrt{b}})^2+(\frac{1}{\sqrt{c}})^2]$

$\geq(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}})^2$

$=(1+1+1)^2=9$。

4. 解下列各不等式：

(1) $x^3+26x\geq 3(3x^2+8)$。

(2) $\frac{1}{x+5}\geq\frac{1}{x^2+x+1}$。

解：(1) $x^3+26x\geq 3(3x^2+8)$，

$x^3-9x^2+26x-24\geq 0$，

$(x-2)(x-3)(x-4)\geq 0$，

$2\leq x\leq 3$ 或 $x\geq 4$。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -9 & +26 & -24 & 2 \\
 & 2 & -14 & +24 & \\
\hline
1 & -7 & +12 & 0 & \\
 & 3 & -12 & & 3 \\
\hline
1 & -4 & 0 & &
\end{array}
$$

(2) $\dfrac{1}{x+5} \geq \dfrac{1}{x^2+x+1}$ 移項通分

$\dfrac{(x^2+x+1)-(x+5)}{(x+5)(x^2+x+1)} \geq 0$，

$\dfrac{x^2-4}{(x+5)(x^2+x+1)} \geq 0$，

$\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+5)} \geq 0$ （因 $x^2+x+1>0$ 恆成立?），

$(x+2)(x-2)(x+5) \geq 0$，$x \neq -5$，得 $-5 < x \leq -2$ 或 $x \geq 2$。

5. 設 $f(x)=2x^2-3x+1$。

(1) 若 x 為任意實數，求 $f(x)$ 的最小值。

(2) 若 $|x| \leq 1$，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解：$f(x)=2x^2-3x+1=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$，

(1) 若 x 為任意實數，當 $x=\dfrac{3}{4}$ 時，$f(x)$有最小值 $-\dfrac{1}{8}$。

(2) 當 $|x| \leq 1$，即 $-1 \leq x \leq 1$，

當 $x=-1$ 時，$f(x)$有最大值 6。

當 $x=\dfrac{3}{4}$ 時，$f(x)$有最小值 $-\dfrac{1}{8}$。

6. 已知 $A(2,1)$，$B(2,6)$，$C(5,3)$，$D(5,0)$ 為坐標平面上的四點。

(1) 試以二元一次聯立不等式表示四邊形 $ABCD$ 的區域（含邊界）。

(2) 試求四邊形 $ABCD$ 面積。

(3) 若 $P(x,y)$ 為四邊形 $ABCD$ 區域的任一點，求 $2x+y+3$ 的最大值與最小值。

解：(1) 直線 AB 的方程式為 $x=2$；

直線 BC 的方程式為 $y-6=-(x-2)$，即 $x+y-8=0$；

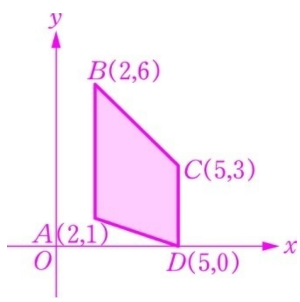
直線 CD 的方程式為 $x=5$；

直線 DA 的方程式為 $y=-\frac{1}{3}(x-5)$，即 $x+3y-5=0$。

由右圖知，四邊形 $ABCD$ 的區域（含邊界）

聯立不等式：

$$\begin{cases} x\geq 2, \\ x+y\leq 8, \\ x\leq 5, \\ x+3y\geq 5。 \end{cases}$$



(2) 四邊形 $ABCD$ 的面積為

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 絕對值 $=12$。

(3)

(x,y)	$(2,1)$	$(2,6)$	$(5,3)$	$(5,0)$
$2x+y+3$	8	13	16	13

故 $2x+y+3$ 的最大值是 16，最小值是 8。

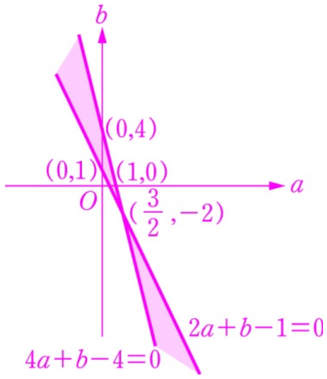
7. 設 $A(4,4)$，$B(2,1)$ 為 xy 平面上兩點，而直線 $y=ax+b$ 與線段 AB 相交。作一圖，以 a 為橫坐標，b 為縱坐標，將數對 (a,b) 的範圍表示出來。

解：因直線 $y=ax+b$ 與 AB 相交，

故 $(4a-4+b)(2a-1+b)\le 0$，

得 $\begin{cases}4a+b-4\ge 0,\\ 2a+b-1\le 0。\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4a+b-4\le 0,\\ 2a+b-1\ge 0。\end{cases}$

而滿足上式之點 (a,b) 所成的圖形如右區域。



B 挑戰題

1. 設 $\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}=12$，其中 p，q 為正數，試求 $3\log_{\frac{1}{3}}p+\log_{\frac{1}{3}}q$ 的最大值，又此時 p，q 之值為何？

解：將 $\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}=12\Rightarrow\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3q}=12$，

算幾不等式 $\dfrac{\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3q}}{4}\ge\sqrt[4]{\frac{1}{3p}\cdot\frac{1}{3p}\cdot\frac{1}{3p}\cdot\frac{1}{3q}}$，

故 $\frac{12}{4}\ge\sqrt[4]{\frac{1}{3^4p^3q}}$，得 $3^4\ge\frac{1}{3^4p^3q}$，所以 $p^3q\ge(\frac{1}{3})^8$，

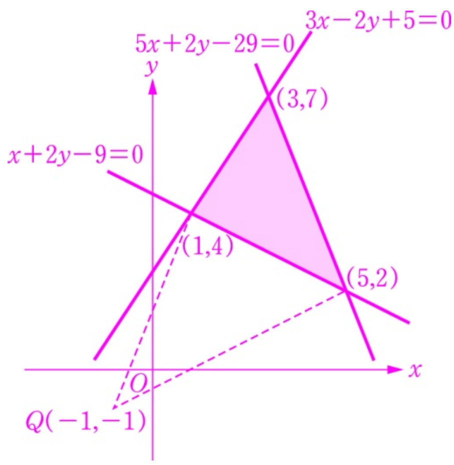
取 log $\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{3}}p^3q\le\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^8$，$3\log_{\frac{1}{3}}p+\log_{\frac{1}{3}}q\le 8$，

故 $3\log_{\frac{1}{3}}p+\log_{\frac{1}{3}}q$ 的最大值是 8。此時 $\frac{1}{3p}=\frac{1}{3q}=3$，即 $p=q=\frac{1}{9}$。

2. 設 R 表示聯立不等式 $\begin{cases} x+2y-9\geq 0\text{，} \\ 3x-2y+5\geq 0\text{，} \\ 5x+2y-29\leq 0 \end{cases}$ 所圍成的圖形區域，且 $P(x,y)$ 為區域 R 中的任一點，求：

(1) $2x-3y$ 的極值。 (2) $\dfrac{y+1}{x+1}$ 的極值。 (3) x^2+y^2 的極值。

解：$\begin{cases} x+2y-9\geq 0\text{，} \\ 3x-2y+5\geq 0\text{，} \\ 5x+2y-29\leq 0 \end{cases}$ 的圖解如右圖：



(1)

(x,y)	$(1,4)$	$(5,2)$	$(3,7)$
$2x-3y$	-10	4	-15

故 $2x-3y$ 的最大值是 4，最小值是 -15。

(2) $\dfrac{y+1}{x+1}$ 表示 $P(x,y)$ 與 $Q(-1,-1)$ 連成的直線的斜率，

故當 $(x,y)=(1,4)$ 時，$\dfrac{y+1}{x+1}$ 的最大值是 $\dfrac{5}{2}$；

當 $(x,y)=(5,2)$ 時，$\dfrac{y+1}{x+1}$ 的最小值是 $\dfrac{1}{2}$。

(3) x^2+y^2 表示 $P(x,y)$ 與原點距離的平方。

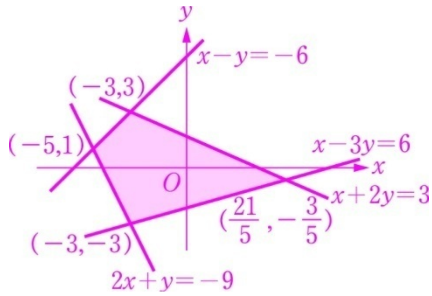
故當 $(x,y)=(3,7)$ 時，x^2+y^2 的最大值是 58；

而 x^2+y^2 的最小值是原點到直線 $x+2y-9=0$ 的距離的平方，

即 $\dfrac{(0+0-9)^2}{1^2+2^2}=\dfrac{81}{5}$。

3. 在條件 $\begin{cases} 2x+y\geq -9\text{，} \\ x-3y\leq 6\text{，} \\ x+2y\leq 3\text{，} \\ x-y\geq -6 \end{cases}$ 的限制下，已知 $x=-3$，$y=3$ 是使目標函數 $kx-y+3$ 取得最小值的最佳解，求 k 的範圍。

解：聯立不等式 $\begin{cases} 2x+y\geq -9\text{，} \\ x-3y\leq 6\text{，} \\ x+2y\leq 3\text{，} \\ x-y\geq -6 \end{cases}$ 之圖解區域如右：



其頂點為 $(-5,1)$，$(-3,3)$，

$\left(\frac{21}{5},-\frac{3}{5}\right)$，$(-3,-3)$

(x,y)	$(-5,1)$	$(-3,3)$，	$\left(\frac{21}{5},-\frac{3}{5}\right)$	$(-3,-3)$
$kx-y+3$	$-5k+2$	$-3k$	$\frac{21k+18}{5}$	$-3k+6$

因 $x=-3$，$y=3$ 時，$kx-y+3$ 有最小值。

故 $\begin{cases} -3k\leq -5k+2\text{，} \\ -3k\leq -3k+6\text{，} \\ -3k\leq \frac{21k+18}{5} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} k\leq 1\text{，} \\ k\geq -\frac{1}{2}\text{。} \end{cases}$ 得 $-\frac{1}{2}\leq k\leq 1$

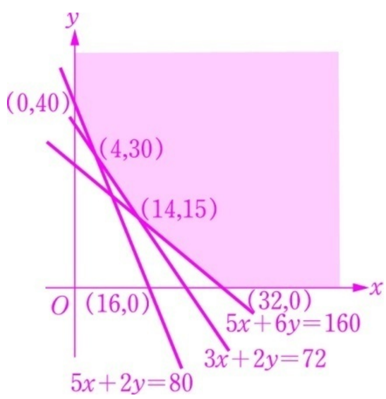
4. 某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若是在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可提升歌手的形象指數 6 點，知

名度指數 4 點。根據市場調查發現成為名歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數(形象指數與知名度指數的和)至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位歌手（假設形象指數與知名度指數皆為 0）成為名歌星至少應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電台應各分配多少，效果最好。

解：設廣告費中報章雜誌分配 $10x$ 萬元，電台分配 $10y$ 萬元，

則 $\begin{cases} 5x+6y\geq 160\text{，} \\ 10x+4y\geq 160\text{，} \\ 15x+10y\geq 360\text{，} \\ x\text{，}y\geq 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} 5x+6y\geq 160\text{，} \\ 5x+2y\geq 80\text{，} \\ 3x+2y\geq 72\text{，} \\ x\text{，}y\geq 0 \end{cases}$



其圖解區域如右：

求目標函數 $P=x+y$ 的最小值

(x,y)	$(0,40)$	$(4,30)$	$(14,15)$	$(32,0)$
$P=x+y$	40	4	29	32

當 $x=14$，$y=15$，P 有最小值 29，

即報章雜誌分配 140 萬元，電台分配 150 萬元，花費最少，最少是 290 萬元。

5. 某公司所生產的產品，存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位、40 單位，現在市場 A、市場 B 分別的需求量是 20 單位、30 單位，下表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本：

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500 元	450 元
倉庫乙	400 元	300 元

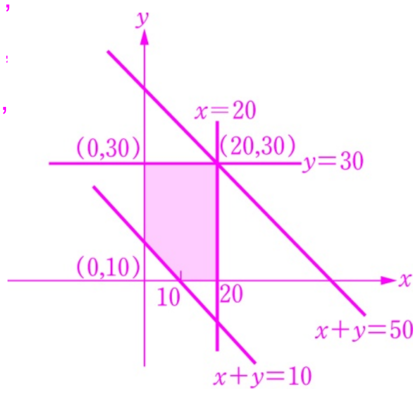
在滿足 A，B 市場的需求下，最節省的運輸成本是多少？

解：設自甲倉庫運送 x 單位到市場 A，運送 y 單位到市場 B；

則自乙倉庫運送（$20-x$）單位到市場 A，運送（$30-y$）單位到市場 B。

依題意得下列聯立不等式：

則 $\begin{cases} 0\le x\le 20\text{，} \\ 0\le y\le 30\text{，} \\ x+y\le 50\text{，} \\ (20-x)+(30-y)\le 40 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0\le x\le 20\text{，} \\ 0\le y\le 30\text{，} \\ x+y\le 50\text{，} \\ x+y\ge 10 \end{cases}$



其可行解區域如右：

而運輸成本為

$P=500x+400(20-x)+450y+300(30-y)$

$=100x+150y+17000$（元），

比較可行解區域頂點的目標函數值：

(x,y)	$(10,0)$	$(20,0)$	$(20,30)$	$(0,30)$	$(0,10)$
$P=100x+150y+17000$	18000	19000	23500	21500	18500

故 P 的最小值是 18000，即最節省的運輸成本是 18000 元。