高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：98.10.08

範圍	二項分配	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

一、單選題: 每題 5 分

(　　) 1. 根據一項民意調查，發現有 60%的人贊成賭博合法化，在 95%的信心水準下信賴區間爲[0.56 , 0.64]，則抽樣的樣本數有多少人？

(A)500 人　(B)600 人　(C)800 人　(D)1000 人　(E)1200 人。

【解答】：B

【解析】：設此次調查抽樣n人，信賴區間[0.56 , 0.64]，又$\hat{p}=60\%=0.6$

故$\pm 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}=\pm 2\sqrt{\dfrac{0.6(1-0.6)}{n}}=\pm 0.04 \Rightarrow n=600$（人）

(　　) 2. 已知隨機變數$X \sim B(n\,,\,p)$，則下列敘述何者錯誤？

(A) X的機率分配爲$P(X=k)=C^n_k p^k(1-p)^{n-k}$， $k=0,1,2,\cdots,n$

(B) X只能取值$0,1,2,\cdots,n$ ，且$0 \le p \le 1$

(C) X的期望值$E(X)=n\cdot(1-p)$

(D) X的變異數$Var(X)=np(1-p)$

(E) X的標準差$\sigma_X=\sqrt{np\,(1-p)}$ 。

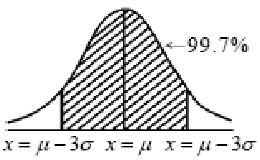
【解答】：C

【解析】： $E(X)=np$ ； $Var(X)=np(1-p)$

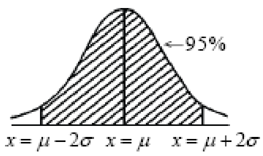
(　　) 3. 關於期望值爲μ ，標準差爲σ的常態分配曲線，下列敘述何者錯誤？

(A)曲線以$x=\mu$爲對稱軸　　(B)曲線下與橫軸之間的總面積爲 1

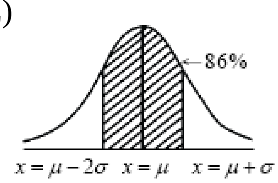
(C)



(D)

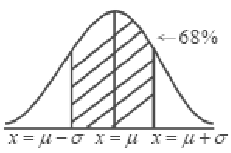


(E)



【解答】：E

【解析】：(E)



(　　) 5. 某銀行在春節期間爲了提升樂透彩的買氣，特別加碼 1 億元，爲瞭解民眾的反應，委託民調公司電訪，約有 65%的受訪者表示會前往購買，在 95%的信心水準下，正負誤差 5 個百分點，則電訪的樣本約有多少人？　（誤差公式：正負誤差$\pm 2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ ）

(A)150 人　(B)324 人　(C)364 人　(D)504 人　(E)623 人。

【解答】：C

【解析】：正負誤差 $\pm 2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

$\pm 2\sqrt{\dfrac{0.65(1-0.65)}{n}}=\pm 0.05 \Rightarrow \dfrac{0.65\cdot 0.35}{n}=(0.025)^2 \Rightarrow n=\dfrac{0.65\cdot 0.35}{0.025\cdot 0.025}=364$（人）

(　　) 6. 根據一項民意調查，發現有 60%的人贊成賭博合法化，在 95%的信心水準下信賴區間爲 $[0.56\,,0.64]$，則抽樣的樣本數 n 最接近

(A)100 人　(B)300 人　(C)600 人　(D)2400 人　(E)3000 人。

【解答】：C

【解析】：設此次調查抽樣 n 人信賴區間 $[0.56\,,0.64]$ 可表爲 $0.6\pm 2\cdot 0.02 \Rightarrow p=0.6$

故 $\pm 2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}=\pm 2\sqrt{\dfrac{0.6(1-0.6)}{n}}=\pm 0.04 \Rightarrow n=\dfrac{0.6\cdot 0.4}{0.02\cdot 0.02}=600$ (人)

二、多選題: 每題 10 分

(　　) 1. 高鐵通車後，縮短了南北的距離。高鐵公司爲瞭解乘客搭乘的滿意度，於各車廂放置意見箱，有效回收 1060 份意見表，其中 424 份覺得非常滿意，在 95%的信心水準下，下列選項何者爲真？　(A)非常滿意的比例爲 40%　(B)正負誤差爲 4 個百分點

(C)正負誤差爲 3 個百分點　(D)信賴區間爲 $[0.37\,,0.43]$　(E)信賴區間爲 $[0.43\,,0.46]$。

【解答】：ACD

【解析】：(A)滿意的比例爲 $\hat{p}=\dfrac{424}{1060}=0.4$

(C)誤差範圍 $\pm 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}=\pm 2\sqrt{\dfrac{0.4(1-0.4)}{1060}}=\pm 0.03$，表示抽樣正負誤差爲 3 個百分點

(D)信賴區間爲 $[0.37\,,0.43]$

(　　) 2. 有 5 題是非題，若某生 5 題均不經思考隨意猜答，則下列哪些選項是正確的？

(A)全部猜對的機率爲 $\dfrac{1}{32}$　(B)只有猜錯 1 題的機率爲 $\dfrac{5}{32}$　(C)恰猜錯 2 題機率爲 $\dfrac{20}{32}$

(D)恰猜錯 3 題的機率爲 $\dfrac{10}{32}$　(E)恰猜錯 4 題的機率爲 $\dfrac{5}{32}$。

【解答】：ABDE

【解析】：設 X 表示答對的題數，則 $P(X=i)=C_i^5(\dfrac{1}{2})^i(\dfrac{1}{2})^{5-i}$，$i=0$，1，2，3，4，5

(A) $P(X=5)=\dfrac{1}{32}$　(B) $P(X=4)=\dfrac{5}{32}$　(C) $P(X=3)=\dfrac{5}{16}$

(D) $P(X=2)=\dfrac{10}{32}$　(E) $P(X=1)=\dfrac{5}{32}$

(　　) 3. 某項民意調查 2000 人中，贊成甲法案者有 1200 人，則在贊成甲法案 95%的信心水準下，下列哪些選項是正確的？

(A)信賴區間為[0.589 , 0.611]　(B)信賴區間為[0.578 , 0.622]　(C)其估計量為 0.6

(D)其估計量的誤差為±0.011　(E)其估計量的誤差為±0.022。

【解答】：BCE

【解析】：估計量 $\hat{P}=\dfrac{1200}{2000}=0.6$ ，誤差為 $\pm2\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{2000}}\fallingdotseq\pm0.022$

$\Rightarrow$ 信賴區間為 $[\,0.6-0.022\,,0.6+0.022\,]=[0.578,0.622\,]$

(　　) 4. 投擲一枚均勻硬幣四次，恰好出現 n 次正面的機率記為 a_n ；投擲一枚均勻硬幣八次，恰好出現 n 次正面的機率記為 b_n 。試問以下哪些選項是正確的？

(A) $a_2=\dfrac{1}{2}$　(B) $a_2=b_4$　(C) $b_2=b_6$　(D) $a_3>b_3$　(E) b_0、b_1、b_2、$\cdots$、b_8 中最大值是 b_4。

【解答】：CDE

【解析】： $a_n=C_n^4(\dfrac{1}{2})^{4-n}(\dfrac{1}{2})^n=C_n^4(\dfrac{1}{2})^4$ ， $b_n=C_n^8(\dfrac{1}{2})^{8-n}(\dfrac{1}{2})^n=C_n^8(\dfrac{1}{2})^8$

(A)(B) $a_2=C_2^4(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{3}{8}$ ， $b_4=C_4^8(\dfrac{1}{2})^8=\dfrac{35}{128}$

(C) $b_2=C_2^8(\dfrac{1}{2})^8=C_6^8(\dfrac{1}{2})^8=b_6$

(D) $a_3=C_3^4(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{4}=\dfrac{8}{32}$ ， $b_3=C_3^8(\dfrac{1}{2})^8=\dfrac{7}{32}$ ，　$\therefore a_3>b_3$

(E) $\because C_4^8>C_3^8=C_5^8>C_2^8=C_6^8>C_1^8=C_7^8>C_0^8$　$\therefore b_4$ 之值最大

三、填充題: 每題 10 分

1. 遺傳學的研究顯示，某對父母的子女之血型為 O 型的機率為 0.25，且每位子女的血型獨立。該對父母有 5 位子女，令 X 為血型為 O 型子女的人數，則 $P(X=2)=$__________。

【解答】： $\dfrac{135}{512}$

【解析】： X 為血型為 O 型子女的人數，且每位子女的血型獨立，則 X 服從二項分配 $X\sim B(5\,,0.25)$ ，5 位子女中，恰有 2 位血型為 O 型的機率 $=P(X=2)=C_2^5(\dfrac{1}{4})^2(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{135}{512}$

2. 設袋中有 3 紅球 2 白球，今從袋中隨機拿出一球，觀察其顏色之後再放回去，重複上述操作 5 次， 則計算拿到白球個數的期望值為_________、變異數為__________、標準差為_________。

【解答】：2； $\dfrac{6}{5}$ ； $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$

【解析】：設拿到白球數為 X ， $X \sim B(5,\frac{2}{5})$

$\therefore$期望值 $E(X)=np=5\cdot\frac{2}{5}=2$ ，

變異數 $Var(X)=np(1-p)=5\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ ，

標準差 $\sigma_X=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{6}{5}}$

3. 擲一顆公正骰子 5 次，6 點恰好出現 3 次之機率為_______，又 6 點至少出現 4 次的機率為_________。(已知： $6^5=7776$)

【解答】： $\frac{125}{3888}$ ； $\frac{13}{3888}$

【解析】：6 點恰好出現 3 次之機率 $p_1=C_3^5(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2=\frac{125}{3888}$

6 點至少出現 4 次的機率 $p_2=C_4^5(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})+C_5^5(\frac{1}{6})^5=\frac{13}{3888}$

4. 袋裡 20 個球中有 4 個紅球，今從中每次取一個球，取後放回，連取 3 次，則：

(1)第 3 次取到紅球的機率為__________。(2)取出紅球個數的期望值為__________。

【解答】：(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

【解析】：(1)每次取到紅球的機率為 $\frac{1}{5}$ ，每次取球均為獨立事件，故第 3 次取到紅球的機率為 $\frac{1}{5}$

(2)設取出紅球之個數為 X ，則 $X \sim B(3,\frac{1}{5})$ ， $E(X)=3\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

5. 投擲一公正銅板 100 次，令 X 表示出現正面的次數，則 $\frac{X}{100}$ 的期望值為____，標準差為_____。

【解答】： $\frac{1}{2}$ ； $\frac{1}{20}$

【解析】：投擲一公正銅板 100 次，令 X 表示出現正面的次數，則 $X \sim B(100,\frac{1}{2})$

$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50$ ， $Var(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=25$ ，

$\frac{X}{100}$的期望值 $E(\frac{X}{100})=\frac{1}{100}E(X)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

$\frac{X}{100}$的變異數 $Var(\frac{X}{100})=(\frac{1}{100})^2\,Var(\frac{X}{100})=(\frac{1}{100})^2\cdot 25$

$\frac{X}{100}$的標準差為 $\sqrt{Var(\frac{X}{100})}=\frac{1}{100}\cdot 5=\frac{1}{20}$

6. 為了驗證一枚古硬幣是否為勻稱的硬幣，某人做了多次的投擲試驗，並發表推論如下：「我

們有 95%的信心認爲，此硬幣出現正面的機率是 36%到 44%之間」。在此實驗中，共投擲了 K 次硬幣，其中出現 M 次正面，則 $(K, M)=$__________。

【解答】： $(600, 240)$

【解析】：設共投擲了硬幣 n 次，因爲 36%到 44%的機率可以表爲 $40\% \pm 4\%$

出現正面機率 $\hat{p}=40\%$ ，正負誤差 4 個百分點

由公式得到 $2\sqrt{\dfrac{0.4(1-0.4)}{n}}=0.04 \Rightarrow n=600$，其中正面出現次數爲 $600 \cdot \dfrac{40}{100}=240$（次）

7. 甲與另一名候選人共同參選角逐里長，其競選團隊有如下的調查結果，則：

(1)隨機抽樣 25 人，其中有 16 人對甲表示支持，則 95%的信賴區間爲__________。

(2)隨機抽樣 100 人，其中有 64 人對甲表示支持，則 95%的信賴區間爲__________。

【解答】：(1) $[0.448, 0.832]$ (2) $[0.544, 0.736]$

【解析】：(1)在 25 位受訪者當中，有 16 位表示支持，即甲候選人的支持率 $\hat{p}=\dfrac{16}{25}=0.64$ ，

計算 95%的信賴區間： $\hat{p} \pm 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.64 \pm 2\sqrt{\dfrac{0.64(1-0.64)}{25}}=0.64 \pm 2 \cdot 0.096$ ，

得 $[0.64-0.192, 0.64+0.192]=[0.448, 0.832]$

(2)在 100 位受訪者當中，有 64 位表示支持，甲的支持率爲 $\hat{p}=\dfrac{64}{100}=0.64$

95%的信賴區間： $\hat{p} \pm 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.64 \pm 2\sqrt{\dfrac{0.64(1-0.64)}{100}}=0.64 \pm 2 \cdot 0.048$

得 $[0.64-0.096, 0.64+0.096]=[0.544, 0.736]$

8. 針對臺灣地區的詐騙電話做調查後發現：「有 95%的信心認爲約有 70%到 76%的人曾接過詐騙電話」，則此次調查約抽樣__________人，樣本中曾接過詐騙電話的約有__________人。

【解答】：876；639

【解析】：$\because$ 有 95%的信心認爲約有 70%到 76%的人曾接過詐騙電話，$\therefore \hat{p}=0.73$ ，

誤差正負 3 個百分點 $\pm 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\pm 2\sqrt{\dfrac{0.73(1-0.73)}{n}}=\pm 3\% \Rightarrow n=876$

曾接過詐騙電話的約有 $876 \cdot 0.73 \fallingdotseq 639$（人）

9. 一個正四面體，每面分別標示 1、2、3、4 四種點數，投擲這正四面體靜止後，覆蓋的面之點數爲投擲點數，假設四種點數出現的機會均等。若投擲五次，則恰好出現三次 1 點的機率爲__________；又至少出現四次 1 點的機率爲__________。

【解答】： $\dfrac{45}{512}$ ； $\dfrac{1}{64}$

【解析】：　$C_3^5(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2=\frac{45}{512}$；$C_4^5(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})+C_5^5(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0=\frac{1}{64}$

10.某位飛靶射手的命中率爲 0.8，今射擊 100 發，假設每次射擊互不影響，則命中次數的期望值爲__________，標準差爲__________。

【解答】：80；4

【解析】：　$E(X)=100\times 0.8=80$；$\sigma_X=\sqrt{100\times 0.8\times(1-0.8)}=4$

11.投擲一顆公正的骰子五次，令 X 表示點數出現 3 的倍數之次數，則

(1) $P(|X-2|)\le 1=$__________。(2) X 的期望值爲__________；變異數爲__________。

【解答】：(1) $\frac{200}{243}$　(2) $\frac{5}{3}$；$\frac{10}{9}$

【解析】：$P(X=i)=\mathrm{C}_i^5(\frac{2}{3})^{5-i}(\frac{1}{3})^i$，$i=0$，1，2，3，4，5

(1) $P(|X-2|\le 1)=P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{40}{243}=\frac{200}{243}$

(2) $E(X)=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，$Var(X)=5\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{10}{9}$

12.根據過去經驗評估大學生在課餘兼差的比例不大於 0.4，今欲調查大學生在課餘兼差的比例，若設定在 95%的信心水準下，誤差不大於 3%，則至少應抽取樣本數爲__________個。

【解答】：1067

【解析】：設抽取樣本數爲 n，且課餘兼差的比例爲 p，則

$2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\le 3\%$ 且 $0\le p\le 0.4\Rightarrow n\ge\frac{40000}{9}p(1-p)$

又 $p(1-p)=-(p-0.5)^2+0.25$，$0\le p\le 0.4$

故當 $p=0.4$ 時，$p(1-p)$ 有最大值爲 0.24

此時 $n\ge 1066.\overline{6}$，即至少應抽取 1067 個樣本

13.已知 $X\sim B(2,p)$，$Y\sim B(5,p)$，且 $P(X\ge 1)=0.75$，試求：

(1) $p=$______。(2) $P(Y\ge 2)=$______。(3)期望值 $E(Y)=$_______。(4)變異數 $Var(Y)=$_______。

【解答】：(1)0.5　(2)0.8125　(3)2.5　(4)1.25

【解析】：(1) $\because X\sim B(2,p)$ 且 $P(X\ge 1)=0.75$

$\therefore C_1^2 p(1-p)+C_2^2 p^2(1-p)^0=0.75\Rightarrow 4p^2-8p+3=0\Rightarrow p=0.5$ 或 $p=1.5$（不合）

(2) $P(Y\ge 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)$

$=1-\mathrm{C}_0^5(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^0-\mathrm{C}_1^5(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^1=0.8125$

(3) $E(Y)=5\times\frac{1}{2}=2.5$

(4) $Var(Y)=5\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=1.25$

14.重複進行某個白努利試驗，其成功率為 0.2，一直到成功才停止，則試驗次數的期望值為____。

【解答】：5

【解析】：設試驗次數的期望值為 x 則

$x=1\times0.2+2\times0.8\times0.2+3\times(0.8)^2\times0.2+\cdots+n\times(0.8)^{n-1}\times0.2+\cdots$

$\Rightarrow 0.8x=1\times0.8\times0.2+2\times(0.8)^2\times0.2+\cdots+(n-1)\times(0.8)^{n-1}\times0.2+\cdots$

兩式相減得 $0.2x=1\times0.2+1\times0.8\times0.2+1\times(0.8)^2\times0.2+\cdots+1\times(0.8)^{n-1}\times0.2+\cdots$

$\Rightarrow 0.2x=\frac{0.2}{1-0.8}=1$，即 $x=5$

15.(1)擲一公正骰子 3 次，則 3 次中恰有 2 次為 3 點的機率為__________。

(2)擲一公正硬幣 7 次，恰在第 7 次出現第 3 次反面的機率為__________。

【解答】：(1) $\frac{5}{72}$　(2) $\frac{15}{128}$

【解析】：(1)出現 3 點的機率為 $\frac{1}{6}$，出現其他點數的機率為 $\frac{5}{6}$，∴所求 $=C_2^3\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{5}{6})=\frac{5}{72}$

(2)依題意知，前 6 次中出現 2 次反面，∴所求 $=C_2^6\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{2})^4\times\frac{1}{2}=\frac{15}{128}$

16.已知人的特徵（例如：雙眼皮）是由一對基因所決定，而且一個小孩是從父母各得一個基因。若 A、a 分別代表顯性基因、隱性基因，則這對基因可能是 AA、Aa、aa，其中 AA、Aa 呈現顯性特徵，而 aa 呈現隱性特徵。今有 2 位均為顯性特徵 Aa 的父母，共生育 4 名子女，則其中恰有 2 名子女呈現隱性特徵的機率為__________。

【解答】：$\frac{27}{128}$

【解析】：均為 Aa 的父母生下顯性特徵的子女機率為 $\frac{3}{4}$，故所求機率為 $C_2^4(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^2=\frac{27}{128}$

17.田磊的同學金鑫也喜歡打籃球，命中率為 $\frac{1}{c}$，其命中次數的期望值為 7，變異數為 6，則 $c=$__。

【解答】：7

【解析】：設命中次數 X，則 $X\sim B(n,p)$

$\begin{cases}E(X)=np=7\\Var(X)=np(1-p)=6\end{cases}\Rightarrow 1-p=\frac{6}{7}$，$p=\frac{1}{7}=\frac{1}{c}\Rightarrow c=7$

18.從全國的高中生中選出 900 位做調查，其中贊成高中生不該染髮的有 90 人，在 99.7%的信心水準下，其信賴區間為 $[x,y]$，又 $y-x=\frac{f}{100}$，則 $f=$__________。

【解答】：6

【解析】： $p=\frac{x}{n}=\frac{90}{900}=0.1$

在 99.7%的信心水準下，信賴區間爲$\left[0.1-3\cdot\sqrt{\frac{0.1\cdot(1-0.1)}{900}}\,,\,0.1+3\sqrt{\frac{0.1\cdot(1-0.1)}{900}}\right]$

$=[0.1-3\cdot 0.01\,,\,0.1+3\cdot 0.01]=[0.07\,,\,0.13]=[x\,,\,y]$，$y-x=0.06=\frac{f}{100}\Rightarrow f=6$

19.根據數學 SAT 考試規定，該項測驗的總分如果超過 800 分，一律以 800 分記錄。已知今年 SAT 考試呈現常態分布，其平均 560 分，標準差 120 分，共有 20000 人應考，則收到 800 分成績的考生約有＿＿＿＿＿人。

【解答】：500

【解析】： $(800-560)\div 120=2$（兩個標準差），$\Rightarrow 20000\cdot(1-0.95)\div 2=500$

20. X 爲一隨機變數，且 $Var(4X-6)=144$，則 X 的標準差爲＿＿＿＿＿。

【解答】：3

【解析】： $Var(4X-6)=16Var(X)\Rightarrow 16Var(X)=144\Rightarrow Var(X)=9\Rightarrow$ 標準差爲 3

21.擲一顆公正的骰子 500 次，每次投擲的結果都互不影響，則在 95%的信心水準下，問：

(1)5 點出現的信賴區間爲＿＿＿＿＿。(2)5 點出現次數最多是＿＿＿＿＿次。

【解答】：(1)$[\frac{2}{15},\frac{1}{5}]$ (2)100

【解析】： $p=\frac{1}{6}$代入$2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})}{500}}=\frac{1}{30}$

(1)在 95%的信心水準下，5 點出現的信賴區間爲$[\frac{1}{6}-\frac{1}{30},\frac{1}{6}+\frac{1}{30}]=[\frac{2}{15},\frac{1}{5}]$

(2)5 點出現次數最多有$500\cdot\frac{1}{5}=100$