高雄市明誠中學 高三數學平時測驗					日期：98.10.16
範圍	Book1 數列與級數	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 5 分)

1、(A) 計算$(11)^3+(12)^3+\cdots+(20)^3$之值爲 (A)41075 (B)41095 (C)41115 (D)41135 (E)41155

$\boxed{\text{解析}}$：利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$，知

$$11^3+12^3+\cdots\cdots+20^3=[1^3+2^3+\cdots\cdots+20^3]-[1^3+2^3+\cdots\cdots+10^3]$$
$$=(\frac{20\times21}{2})^2-(\frac{10\times11}{2})^2=210^2-55^2=44100-3025=41075$$ 。

2、(E) 等差級數$(-28)+(-25)+(-22)+\cdots+(29)$可表爲

(A)$\sum_{k=1}^{19}(3k-1)$ (B)$\sum_{k=1}^{20}(3k-1)$ (C)$\sum_{k=-9}^{10}(3k-31)$ (D)$\sum_{k=1}^{19}(3k-31)$ (E)$\sum_{k=1}^{20}(32-3k)$

$\boxed{\text{解析}}$：此數列共$\frac{29-(-28)}{3}+1=20$項，$\therefore\sum_{k=1}^{20}(32-3k)=29+26+\cdots+(-28)$

3、(C) 一等差數列，已知$a_5+a_{17}=22$，則下列何者一定正確？

(A)$a_1=1$ (B)$a_5=5$ (C)$a_{11}=11$ (D)$a_{17}=17$ (E)$a_{22}=22$

$\boxed{\text{解析}}$：$a_5+a_{17}=22,\ \therefore 2a_1+20d=22\Rightarrow a_1+10d=11\Rightarrow a_{11}=11$

二、多重選擇題 (每題 10 分)

1、(BE) 下列各無窮級數中，何者爲收斂？

(A)$\sum_{k=1}^{\infty}(1.5)^k$ (B)$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{7})^{k-1}$ (C)$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{4^k}$ (D)$\sum_{k=1}^{\infty}3$ (E)$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{6^k}$

$\boxed{\text{解析}}$：無窮等比級數收斂之條件爲$-1<$公比<1，$\frac{\pi}{7}\doteqdot0.45<1$。

(A) $\sum_{k=1}^{\infty}(1.5)^k=1.5+1.5^2+1.5^3+\ldots\ldots\ldots\Rightarrow r=1.5>1$

(B) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{7})^{k-1}=\frac{\pi}{7}+(\frac{\pi}{7})^2+(\frac{\pi}{7})^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\Rightarrow r=\frac{\pi}{7}=0.45\ldots.<1$

(C) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{4^k}=\frac{5}{4}+(\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4})^3+\ldots\ldots.\Rightarrow r=\frac{5}{4}>1$

(D) $\sum_{k=1}^{\infty}3=3+3+3+\ldots\ldots\Rightarrow r=1$

(E) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{6^k}=3(\frac{3}{6})+3(\frac{3}{6})^2+3(\frac{3}{6})^3+\ldots\ldots\ldots\Rightarrow r=\frac{3}{6}<1$

2、(CE) 有一個 101 項的等差數列$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{101}$，其和爲 0 且$a_{71}=71$，試問下列選項那些爲正確？ (A)$a_1+a_{101}>0$ (B)$a_2+a_{100}<0$ (C)$a_3+a_{99}=0$ (D)$a_{51}=51$ (E)$a_1<0$

$\boxed{\text{解析}}$：(A)（╳）：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$；

$\because S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$，$S_{101}=\frac{101}{2}(2a_1+100d)=0\ \Rightarrow 2a_1+100d=0\Rightarrow a_1+50d=0$

$a_1+a_{101}=a_1+a_1+100d=2a_1+100d=0$。

(B)（╳）：$a_2+a_{100}=(a_1+d)+(a_1+99d)=2a_1+100d=0$。

(C)（◯）：$a_3+a_{99}=(a_1+2d)+(a_1+98d)=2a_1+100d=0$。

(D)（╳）：$a_{51}=a_1+50d=0$。

(E)（◯）：$\because a_{71}=a_1+70d=71\cdots\cdots①$

又 $a_1+50d=0\cdots\cdots②$

$①-②\times\frac{7}{5}$，$-\frac{2}{5}a_1=71$，$\therefore a_1<0$。

三、填充題（每題 0 分）

1、設 $a, b, c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，若 $\frac{158}{990}<0.\overline{abc}<\frac{145}{900}$，則 $b=$_______, $c=$_______。

答案：6, 0

解析：$\frac{158}{990}=0.1\overline{59}$；$\frac{145}{900}=0.16\bar{1}$，

又 $0.159595959\cdots\cdots<0.abcabcabc\cdots\cdots<0.161111111\cdots\cdots$

$0.159595959\cdots\cdots\therefore a=1$

$0.abcabcabc\cdots\cdots\therefore b=6$

$0.161111111\cdots\cdots\therefore c=0$

2、設一數列 $<a_n>$ 滿足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=1-(3+2n)(\frac{1}{3})^{n+1}$，則

$a_2=$______，又 a_n 的通式爲______。

答案：$\frac{4}{27}, 4\cdot(\frac{1}{3})^{n+1}$

解析：$a_1=1-5(\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$, $a_1+2a_2=1-7(\frac{1}{3})^3=\frac{20}{27}$ $\quad\therefore a_2=\frac{4}{27}$

$$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=1-(3+2n)(\frac{1}{3})^n\Leftarrow S_n$$

$$-)\ a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=1-[3+2(n-1)](\frac{1}{3})^n\Leftarrow S_{n-1}$$

$$na_n=4n\cdot(\frac{1}{3})^{n+1}\Rightarrow a_n=4\cdot(\frac{1}{3})^{n+1}$$

3、一等差數列的首 10 項之和爲 9，首 15 項之和爲 15，試求首 20 項之和爲______。

答案：22

解析：等差數列每 5 項的和仍爲等差數列

$\therefore\begin{cases}A+(A+D)=9\\A+(A+D)+(A+2D)=15\end{cases}$ $\quad\therefore A=4,\ D=1$，首 20 項之和 $=4+5+6+7=22$。

4、一等比級數之公比爲 r，設其前 n 項和爲 S_n，已知 $S_{10}=5,\ S_{20}=15$，則 $S_{40}=$______，又 $r^{10}=$______。

答案：75, 2

解析：SOL 一

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=5$，$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=15$，

兩式相除 $\therefore\frac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=3$ $\quad\therefore r^{10}+1=3$ $\quad\therefore r^{10}=2$

$\dfrac{a}{r-1}=5 \quad \therefore S_{40}=\dfrac{a(r^{40}-1)}{r-1}=5\times(2^4-1)=75$

SOL 二

等比數列每 10 項的和仍爲等比數列：$S_{10}=5,\ S_{20}-S_{10}=10 \Rightarrow R=\dfrac{10}{5}=2$

首 10 項和、次 10 項和、再 10 項和、….

5, 10, 20, 40, …… $\Rightarrow S_{40}=5+10+20+40=75$

5、 等差數列，首項爲 130，公差 -6

(1)第 n 項起始爲負數，則 $n=$______。(2)加到第 n 項之和爲負數，則 n 之最小值爲______。

答案：(1)23 (2)45

解析：(1) $a=130,\ d=-6,\ a_n=130+(n-1)(-6)<0$

$6(n-1)>130,\ n-1>\dfrac{130}{6},\ n>\dfrac{136}{6}=22\dfrac{2}{3} \quad \therefore n=23$

(2) $S_n=\dfrac{n[260+(n-1)(-6)]}{2}<0 \quad \therefore 260+(n-1)(-6)<0$

$\therefore 6(n-1)>260, \therefore n>\dfrac{130}{3}+1=44\dfrac{1}{3}, \therefore n=45$

6、 假設某鎮每年的人口數逐年成長，且成一等比數列，已知此鎮十年前有 25 萬人，現在有 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有______萬人。(求到小數點後一位)

答案：43.2

解析：設 10 年前人口爲首項 $a,\ a=25$，公比爲 r

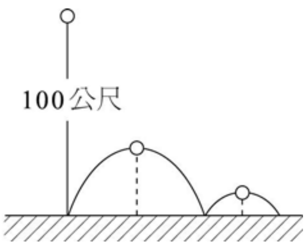
由已知：現有人口 $30=25\times r^{10} \Rightarrow r^{10}=\dfrac{30}{25}=\dfrac{6}{5}$

則 20 年後人口爲 $a\times r^{30}=25\times(r^{10})^3=25\times(\dfrac{6}{5})^3=43.2$ (萬)

7、 一皮球從 100 公尺的高處落下，每次返跳的高度爲其落下時高度的 $\dfrac{1}{3}$ 倍，則至靜止時，此球所經的距離爲______公尺。

答案：200

解析：所經過的距離爲 $100+2[100\times\dfrac{1}{3}+100\times(\dfrac{1}{3})^2+\cdots]=100+2\times\dfrac{\frac{100}{3}}{1-\frac{1}{3}}=100+100=200$（公尺）。



8、一等差數列，加到第 n 項之和 $S_n=n^2+3n$，則 $a_{10}=$_______，又公差 $=$______。

答案：22, 2

解析：$\because S_n=n^2+3n,\ \therefore a_1=S_1=4$， $a_{10}=S_{10}-S_9=130-108=22$

$a_2=S_2-S_1=10-4=6,\ \therefore d=a_2-a_1=2$

9、 (1)計算 $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=$______。

(2)計算$(1)+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+\cdots+$

$[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1]=$____。

答案：(1) 36　　(2) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

解析：(1) $36=6^2$　　(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10、有一數列依照規則排列如下 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, $\cdots,\underbrace{n,\ n,\cdots,\ n\cdots}_{(n+1個)}$ 則 $a_{160}=$______，又前 160 項之和 $S_{160}=$______。

答案：17, 1768

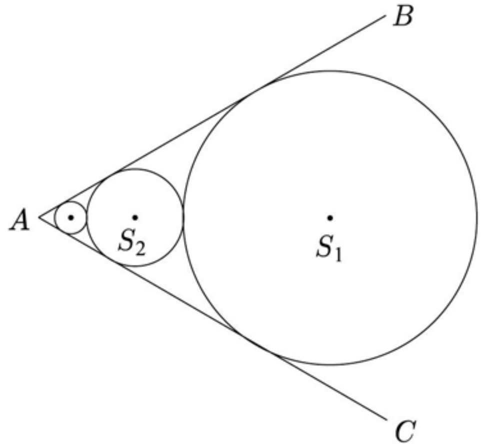
解析：因 $[2+3+\cdots+(\ell+1)]<160$，則 ℓ 之最大値爲 16

$2+3+\cdots+17=152$ 則 $a_{160}=17$

$S_{160}=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+16\times17+17\times8$

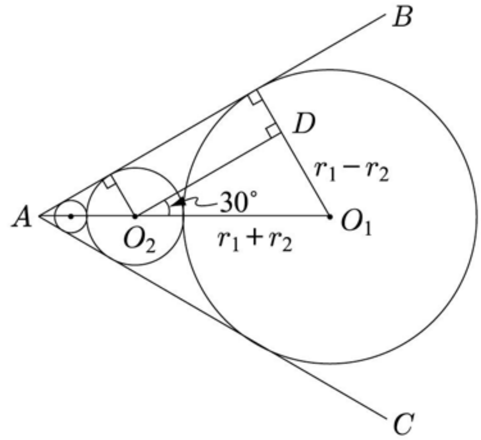
$=\sum_{k=1}^{16}k(k+1)+17\times8=\dfrac{1}{3}\times16\times17\times18+136$

$=1632+136=1768$



11、如圖，$\angle BAC=60^\circ$，設最大圓爲 S_1，若有無窮多個圓 S_1, $S_2, S_3,\ \cdots,\ S_n,\cdots$彼此相切且與$\angle BAC$的兩邊$\overline{AB}$，$\overline{AC}$相切，若 S_1 的面積爲80π，則此無窮多個圓面積和爲_____。

答案：90π



解析：在$\triangle O_1O_2D$中，$\overline{O_1O_2}=2\overline{O_1D}$

$\therefore$半徑和 $r_1+r_2=2(r_1-r_2)\Rightarrow\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{1}{3}$；

$\therefore$公比$r=\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}=(\dfrac{r_2}{r_1})^2=\dfrac{1}{9}$

$\therefore$面積和爲$S_1+S_2+\cdots=\dfrac{80\pi}{1-\frac{1}{9}}=90\pi$。

12、某次網球比賽共有 128 位選手參加，採單淘汰制，每輪淘汰一半的選手，剩下一半的選手進入下一輪。在第 1 輪被淘汰的選手可獲得 1 萬元，在第 2 輪被淘汰的選手可獲得 2 萬元，在第 k 輪被淘汰的選手可獲得2^{k-1}萬元，而冠軍則可獲得 128 萬元。試問全部比賽獎金共_萬元。

答案：576

解析：$128=2^7$，則

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪	第五輪	第六輪	第七輪
獎金 =	$\underset{(淘汰人數)}{2^6}\cdot\underset{(獎金)}{1}+$	$2^5\cdot2^{2-1}+$	$2^4\cdot2^{3-1}+$	$2^3\cdot2^{4-1}+$	$2^2\cdot2^{5-1}+$	$2^1\cdot2^{6-1}+$	$\underset{(亞軍)}{1\cdot2^{7-1}}+\underset{(冠軍)}{2^7}$

$=2^6\times7+2^7=576$

13、用單位長的不銹鋼條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的小圈圈「。」表示焊接點，圖 E_1 有兩層共 4 個焊接點，圖 E_2 有三層共 10 個焊接點，圖 E_3 有四層共 20 個焊接點。

試問依此規律，推算圖 E_5 有六層共多少焊接點？_______個。

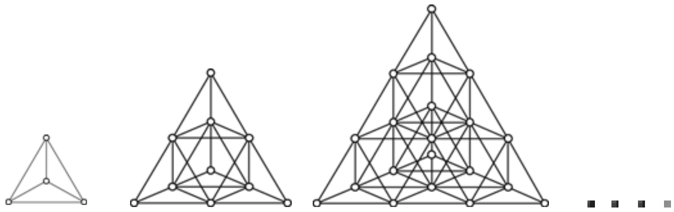


圖 E_1　　圖 E_2　　　　圖 E_3

$\boxed{答案}$：56 個

$\boxed{解析}$：設 a_i 表圖 E_i 的焊接點，由圖形觀察：

$$a_1=\underbrace{1}_{(第一層)}+\underbrace{3}_{(第二層)}=4$$

$$a_2=\underbrace{1}_{(第一層)}+\underbrace{3}_{(第二層)}+\underbrace{6}_{(第三層)}=10$$

$$a_3=1+3+6+10=20$$

所以 $a_4=1+3+6+10+15=35$

$a_5=1+3+6+10+15+21=56$，$\therefore E_5$ 的焊接點數為 56。

14、遞迴數列$\langle a_n\rangle$，已知 $a_1=1$, 且 $a_n=a_{n-1}+(n-1)$，則

(1)$a_5=$______，(2)a_n的通式為______，(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=$______。

$\boxed{答案}$：(1)11　(2)$\dfrac{n^2-n+2}{2}$　(3)$\dfrac{n(2n^2-3n+7)}{12}$

$\boxed{解析}$：(1) $a_5=a_4+4=a_3+3+4=\cdots=a_1+1+2+3+4=11$

(2) $a_n=a_{n-1}+(n-1)=a_{n-2}+(n-2)+(n-1)=\cdots$

$$=a_1+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)\quad=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$$

(3) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+2}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right]+n=\frac{n}{12}(2n^2-3n+7)$$

15、設數列$\langle c_n\rangle$的遞迴定義為$\begin{cases}a_1=1\\a_{n+1}=a_n+2n\end{cases}$，則 $a_{20}=$_______。

$\boxed{答案}$：381

$\boxed{解析}$：

$$\begin{aligned}a_{20}&=\cancel{a_{19}}+2\times19\\ \cancel{a_{19}}&=\cancel{a_{18}}+2\times18\\ &\vdots\\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times2\\ +)\ \cancel{a_2}&=\cancel{a_1}+2\times1\\ \hline a_{20}&=a_1+2(1+\cdots+19)=1+2\cdot\frac{19\cdot20}{2}=381\end{aligned}$$

。

16、求 $7.1+0.073+0.00073+0.0000073+\cdots$ 之和為______(以分數表示之)，又將總和化為小數時，

小數點後第 347 位數字爲______。

答案：$7\frac{86}{495},\ 3$

解析：$7.1+0.073+0.00073+\cdots=7.1\overline{73}=7+\frac{173-1}{990}=7\frac{86}{495}$ ，

$347=1+2\times173\Rightarrow$ 小數點後第 347 位數字爲 "3"

17、1, a, b, 15 四數中，前三數成等比，後三數成等差，則數對 $(a,b)=$______或______。

答案：$(-\frac{5}{2},\ \frac{25}{4}),\ (3,\ 9)$

解析：$\begin{cases}a^2=b\\2b=a+15\end{cases}\Rightarrow 2a^2=a+15$ ，$(2a+5)(a-3)=0$ ，$a=-\frac{5}{2},\ 3$ ，故$b=\frac{25}{4},\ 9$

即$(-\frac{5}{2},\ \frac{25}{4})$ 或 $(3,\ 9)$ 。

18、有一個無窮等比級數，其和爲$\frac{3}{4}$，其各項平方和爲$\frac{3}{8}$，已知公比爲一有理數，則當公比以最簡分數表示時，其分母爲______。

答案：5

解析：令首項爲 a，公比爲 r

$\therefore\begin{cases}\frac{a}{1-r}=\frac{3}{4}\cdots\cdots①\\\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{3}{8}\cdots\cdots②\end{cases}$ ，由$\frac{②}{①}$得$\frac{a}{1+r}=\frac{1}{2}\cdots\cdots③$

由$\frac{③}{①}$得$\frac{1-r}{1+r}=\frac{2}{3}\Rightarrow r=\frac{1}{5}$ ，$\therefore$分母爲 5。

19、若數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=\frac{1}{7},a_2=\frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)\quad(n\geq1)$ ，則 $a_{101}-a_{100}=$______。

答案：$\frac{3}{7}$

解析：由 $a_2=\frac{3}{7}$ 知，

$a_3=\frac{7}{2}a_2(1-a_2)=\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$ ，

$a_4=\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{7}=a_2$

$a_5=a_3$

$a_6=a_2$

.

.

.

由歸納可知偶數項皆爲a_2，奇數項皆爲a_3。故 $a_{101}-a_{100}=a_3-a_2=\frac{3}{7}$

20、(1)$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k-1}{7^k}=$______。(2)$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k-1}{7^k}=$______。

$\boxed{答案}$：(1) $\frac{7}{12}$　　(2) $\frac{5}{12}$

$\boxed{解析}$：(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{3}{7})^k-\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{7})^k=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}-\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{12}$

(2)令

$$S_n=\frac{2}{7}+\frac{5}{49}+\cdots+\frac{3n-1}{7^n}$$

$$-)\frac{1}{7}S_n=\frac{2}{49}+\cdots+\frac{3(n-1)}{7^n}+\frac{3n-1}{7^{n+1}}$$

$$\frac{6}{7}S_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{49}+\cdots+\frac{3}{7^n}-\frac{3n-1}{7^{n+1}}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{7}{6}\left[\frac{2}{7}+\frac{\frac{3}{49}}{1-\frac{1}{7}}\right]=\frac{5}{12}$$

21、若小芬於今年初存入 100000 元，年利率為 5%，以複利計算且每年計息一次，則 10 年期滿後，她可領回_______元。($1.05^{10}\doteqdot 1.63$)

$\boxed{答案}$：163000

$\boxed{解析}$：本利和$=100000\times(1+5\%)^{10}=100000\times1.05^{10}=163000$（元）。

22、將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：

第1列	1
第2列	2, 3
第3列	4, 5, 6
第4列	7, 8, 9, 10
…	…

試問第 100 列第 3 個數是_______。

$\boxed{答案}$：4953

$\boxed{解析}$：第 1 列至第 99 列的數共有$1+2+3+\cdots+99=\frac{99\times100}{2}=4950$（個）

$\therefore$第 100 列的第 3 個數是 4953。

23、已知數列 a_n 收斂，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+(-2)^n a_n}{3-(-2)^n}=4$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n=$______，又 $\lim_{n\to\infty}(\frac{-2}{3})^n a_n=$______。

$\boxed{答案}$：$-4,\ 0$

$\boxed{解析}$：設 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+(-2)^n a_n}{3-(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n+a_n}{3(-\frac{1}{2})^n-1}=\frac{0+\lim_{n\to\infty}a_n}{0-1}=-\alpha=4,\ \therefore\alpha=-4$

又 $\lim_{n\to\infty}(\frac{-2}{3})^n\cdot a_n=\lim_{n\to\infty}(-\frac{2}{3})^n\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=0\times(-4)=0$

24、在數列$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots$,中(1)$\frac{3}{7}$爲第______項，(2)第 126 項是______。

$\boxed{答案}$：(1)24　　(2)$\frac{6}{16}$

$\boxed{解析}$：(1) $(1+2+3+4+5+6)+3=24$

(2)$1 + 2 +\cdots+ k \le 126$, k 之最大爲 15, $1 + 2 +\cdots+ 15 = 120$，∴第 126 項爲$\frac{6}{16}$(不可約分)。

25、求$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots66}_{n個6}$之和爲______________。

$\boxed{答案}$：$\frac{2(10^{n+1}-9n-10)}{27}$

$\boxed{解析}$：$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots66}_{n個6}=\frac{6}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{n個9})$

$$=\frac{2}{3}[(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^n-1)]$$

$$=\frac{2}{3}[(10+10^2+\cdots+10^n)-n]=\frac{2}{3}[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n]=\frac{2(10^{n+1}-9n-10)}{27}$$ 。

26、求 $0.7 + 0.077 + 0.00777 +\cdots$之和爲______。

$\boxed{答案}$：$\frac{7}{891}$

$\boxed{解析}$：$0.7+0.077+0.00777+\cdots=\frac{7}{9}\times(0.9+0.099+0.00999+\cdots)$

$$=\frac{7}{9}[(1-0.1)+(0.1-0.001)+(0.01-0.00001)+\cdots]$$

$$=\frac{7}{9}\left[\frac{1}{1-0.1}-\frac{0.1}{1-0.01}\right]=\frac{7}{9}\times(\frac{1}{9}-\frac{10}{99})=\frac{7}{891}$$

27、兩等差數列，第 n 項之比爲$(3n-1) : (4n + 2)$，則首 13 項和之比爲______。

$\boxed{答案}$：2 : 3

$\boxed{解析}$：$S_{13}:S'_{13}=13\times a_7 : 13a'_7=a_7:a'_7=20 : 30=2 : 3$

28、求數列的極限值

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(0.99)^n}{1+(0.99)^n}=$______。　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(1.01)^n}{1+(1.01)^n}=$______。　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n-1}}{(-2)^{n+1}-(4)^{n+1}}=$______。

$\boxed{答案}$：(1)0　　(2)5　　(3)$-\frac{1}{16}$

$\boxed{解析}$：　(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\times(0.99)^n}{1+(0.99)^n}=\frac{0}{1}=0$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\times(1.01)^n}{1+(1.01)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{\frac{1}{(1.01)^n}+1}=5$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^{n-1}}{(-2)^{n+1}-(4)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^n+\frac{1}{16}(1)^{n-1}}{(\frac{-1}{2})^{n+1}-1}=-\dfrac{1}{16}$

29、$\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=$______。

答案：$\sqrt{n+1}-1$

解析：$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

$\therefore\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum\limits_{k=2}^{n+1}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$

30、有一數列$<a_n>$前 3 項分別爲 1,2,1，且$\forall n\in\mathrm{N}$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，則此數列前 50 項之和爲____。

答案：3

解析：$\because a_{n+2}=a_{n+1}-a_n,\forall n\in\mathrm{N}$

$\therefore <a_n>=<1,2,1,-1,-2,-1,1,2,1,-1,-2,\cdots>$

$\therefore$數列$<a_n>$每 6 個一循環

$\therefore S_{50}=(1+2+1-1-2-1)+(1+2+1-1-2-1)+\cdots+(1+2+1-1-2-1)+1+2$

$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{8個}+1+2=3$。

31、將正奇數由小而大依下列方式分組 (1), (3), (5,7), (9,11), (13,15,17), (19,21,23),$\cdots$，已知第 3 組中的第一個數爲 5，則(1)第 21 組中的第一個數爲______，(2)第 21 組內所有數的和爲_____。

答案：(1)221　　(2)2541

解析：每組個數$1,1,2,2,3,3,\ldots\ldots\Rightarrow$第 21 組中共有 11 個數，由第 1 組到第 20 組共有 $2(1+2+\cdots+10)=110$個數，故第 21 組中的第一個數爲第 111 個奇數$2\times111-1=221$，

第 21 組中的所有數之和$=\dfrac{11\times[442+(11-1)\times2]}{2}=2541$

32、設$a_n=\dfrac{3^{n+1}}{(2x-1)^{n-1}}$則 (1)數列$<a_n>$收斂時，$x$ 的範圍爲______，

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收斂時，$x$ 的範圍爲______。

答案：(1) $x\geq2$ 或 $x<-1$　　(2) $x>2$ 或 $x<-1$

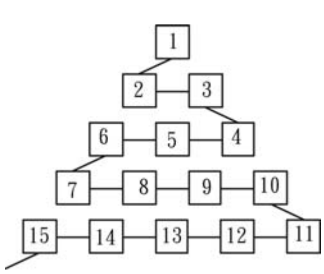
解析：(1)數列收斂，$-1<\dfrac{3}{2x-1}\leq1\quad\Rightarrow\quad\dfrac{3}{2x-1}=1,\ \therefore x=2$

又$-1<\dfrac{3}{2x-1}<1\Rightarrow\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|<1$，$\therefore|2x-1|>3,\Rightarrow 2x-1>3或2x-1<-3\Rightarrow x>2或x<-1$，

$\therefore x\geq2或x<-1$

(1)級數收斂之條件爲$-1<\dfrac{3}{2x-1}<1\Rightarrow x>2或x<-1$

33、下圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：



數字1出現在第1列；數字2,3出現在第2列；數字6,5,4 (從左至右)出現在第3列；數字7,8,9,10出現在第4列；依此類推。試問第99列，從左至右算，第67個數字為______。

$\boxed{答案}$：4884

$\boxed{解析}$：第 1 列有 1 個數，第 2 列有 2 個數(左→右)，第 3 列有 3 個數(右→左)，⋯，第 k 列有 k 個數(？→？)，⋯，因此到第 98 列為止，共有 $1+2+\cdots+98=\dfrac{99\times 98}{2}=4851$ 個數，又第 99 列有 99 個數，而且是由右而左算，故由左至右算的第 67 個數字為 $4851+(99-67+1)=4884$

34、設無窮等比級數 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{100}+\cdots$ 的和為 S，前 n 項之和為 S_n

(1)試求此級數之和 $S=$______。　　(2)試求此等比級數前 n 項之和 $S_n=$______。

(3)若 $\left|S-S_n\right|<\dfrac{1}{10^5}$，則 n 的最小值為______。

$\boxed{答案}$：(1) $\dfrac{5}{16}$　(2) $\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)$　(3) 7

$\boxed{解析}$：(1) $a=\dfrac{1}{4},\ r=\dfrac{1}{5}$　$\therefore S=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}$

(2) $S_n=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)=\dfrac{5}{16}-\dfrac{5}{16}(\dfrac{1}{5})^n$

(3) $\left|S-S_n\right|=\dfrac{5}{16}(\dfrac{1}{5})^n<\dfrac{1}{10^5}$　$\therefore 5^n>\dfrac{5}{16}\times 10^5$　$\therefore 5^n>5^6\times 2$　$\therefore n=7$

35、將 $n\times 1+(n-1)\times 3+(n-2)\times 5+\cdots+1\times(2n-1)$ 以 Σ 表示之為 ________，又其總和為_______。

$\boxed{答案}$：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2k^2+2kn+3k-n+1),\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{解析}$：
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\times(2k-1)&=\sum_{k=1}^{n}[-2k^2+k(2n+3)-(n+1)]\\&=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}1\\&=-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+3)\times\frac{n(n+1)}{2}-n(n+1)\\&=\frac{n(n+1)}{6}\left[(-4n-2)+3(2n+3)-6\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

36、求 $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{3}(\sum_{k=1}^{5}(k+\ell))=$______。

$\boxed{答案}$：75

$\boxed{解析}$：$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{3}(\sum_{k=1}^{5}(k+\ell))=\sum_{\ell=1}^{3}[(1+\ell)+(2+\ell)+(3+\ell)+(4+\ell)+(5+\ell)]=\sum_{\ell=1}^{3}(15+5\ell)$

$$=(15+5\times1)+(15+5\times2)+(15+5\times3)=45+5\times6=75$$

37、設 $a,b\in R$ ，若 $\frac{a}{2}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$ ，求 $2a+b=$______。

答案：9

解析：原式 $\Rightarrow a(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots)+b(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)=3$

$$\therefore a\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right)+b\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)=3 \text{，} \therefore \frac{2}{3}a+\frac{b}{3}=3\Rightarrow 2a+b=9 \text{。}$$

38、設 $4a_n=a_{n-1}+4$ ，且 $a_1=1$ ，(1)試求 $a_4=$______，(2)寫出 a_n 的通式為______。

答案：(1) $\frac{85}{64}$　　(2) $\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]$

解析：SOL 一：

$$a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+1,\ a_4=\frac{1}{4}a_3+1=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}a_2+1)+1=\frac{85}{64}$$

$$a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+1=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}a_{n-2}+1)+1=\cdots=(\frac{1}{4})^{n-1}a_1+(\frac{1}{4})^{n-2}+\cdots+1=\frac{1\cdot[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]$$

SOL 二

設 $4(a_n-k)=(a_{n-1}-k)\Rightarrow 4a_n=a_{n-1}+3k$ 比較 $4a_n=a_{n-1}+4$ ， $k=\frac{4}{3}$

即 $4(a_n-\frac{4}{3})=(a_{n-1}-\frac{4}{3})$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & 4(a_n-\tfrac{4}{3})=(a_{n-1}-\tfrac{4}{3})\\
& 4(a_{n-1}-\tfrac{4}{3})=(a_{n-2}-\tfrac{4}{3})\\
& 4(a_{n-2}-\tfrac{4}{3})=(a_{n-3}-\tfrac{4}{3})\\
& \vdots\\
& \vdots\\
& 4(a_3-\tfrac{4}{3})=(a_2-\tfrac{4}{3})\\
& 4(a_2-\tfrac{4}{3})=(a_1-\tfrac{4}{3})
\end{aligned}$$

累乘　$4^{n-1}(a_n-\frac{4}{3})=(a_1-\frac{4}{3})\Rightarrow a_n=-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]$

39、有兩個等差數列 $<a_n>\ =\ <0,\ 7,\ 14,\ 21,\cdots,\ 994>,<b_n>\ =\ <1,\ 5,\ 9,\ 13,\cdots,\ 1001>$ 由這兩個數列中取出全部共同項，由小而大依序排列，得另一數列 $<c_n>$ 共有 k 項，則 (1)求 c_1 之值為______，(2) $c_1+c_2+\cdots+c_k$ 之和 $=$ ______。

答案：(1)21　　(2)17395

$\boxed{解析}$：$0+7(m-1)=1+4(k-1),\ m,k\in \mathrm{N}$

$7m-7=4k-3,\ 7m=4k+4=4(k+1)$ ，取 $k=6,\ m=4$ 爲最小值，$\therefore c_1=7\times(4-1)=21$

$\lt c_n \gt$的公差爲$\lt a_n \gt$,$\lt b_n \gt$兩公差 7、4 的最小公倍數 28，

$\therefore$末項爲$c_{35}=21+34\times 28=97$ ，$\therefore$和$=\dfrac{35(42+34\times 28)}{2}=17395$