高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：98.09.25

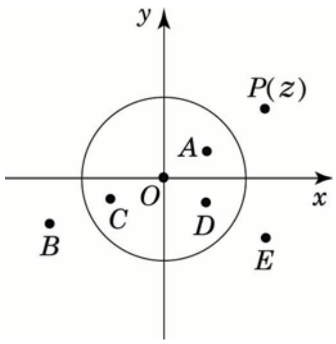
範圍	Book1 複數與方程式	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

1、(C)　$(4-3i)(5+2i)=a+bi$, $\dfrac{5+2i}{4+3i}=c+di$ ，a, b, c, d 均為實數，則 (A) $a=20$　(B) $b=7$
(C) $c=\dfrac{26}{25}$　(D) $d=\dfrac{-7}{5}$　(E) $25a=c$

$\boxed{解析}$：$(4-3i)(5+2i)=26-7i \because a=26, b=-7$ ，$\dfrac{5+2i}{4+3i}=\dfrac{26-7i}{25}, c=\dfrac{26}{25}, d=\dfrac{-7}{25}$

2、(D)　如圖，複數 z 在平面上對應的點 P 在單位圓 O 的外部，問複數 $\dfrac{1}{z}$ 對應的點大概是哪一點？ (A)A (B)B (C)C (D)D (E)E



$\boxed{解析}$：$z=a+bi$, $a,b>0$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ ，其中 $\dfrac{a}{a^2+b^2}>0,\ -\dfrac{b}{a^2+b^2}<0$

$\dfrac{1}{z}$ 的對應點在第四象限，$|z|>1 \Rightarrow \dfrac{1}{|z|}<1 \Rightarrow \dfrac{1}{z}$ 的對應點在圓之內部，故選 D 點。

3、(C)　令 $i=\sqrt{-1}$，$\overline{z}$ 表複數 z 的共軛複數。在複數平面上，所有滿足方程式 $(1+i)z-(1-i)\overline{z}=0$ 的複數 z ，會形成下列哪種的圖形？ (A)一點 (B)一圓 (C)一直線 (D)兩直線

$\boxed{解析}$：設 $z=x+yi$

$\because (1+i)z-(1-i)\overline{z}=0$ ，$\therefore (1+i)(x+yi)-(1-i)(x-yi)=0$

$\Rightarrow [(x-y)+(x+y)i]-[(x-y)-(x+y)i]=0 \Rightarrow 2(x+y)i=0 \Rightarrow x+y=0$

圖形為直線 $x+y=0$

二、多重選擇題 (每題 10 分)

1、(BE)　下列敘述何者正確？ (A)若 a, b 為實數，且 $a^2+b^2>0$ ，則 $a>0$ 或 $b>0$
(B)若 $a<0$ 且 $b<0$ ，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
(C)若 z_1, z_2 為複數，且 $|z_1|>|z_2|$ ，則 $z_1>z_2$
(D)若 a 為有理數且 b 不為有理數，則 ab 不為有理數
(E)若 $a+b, a-b$ 為有理數，則 a 為有理數且 b 為有理數

2、(DE)　設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 為複數，則下列何者為真？　(A) $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ 且 $\beta=0$
(B) $\alpha+\beta>0$ 且 $\alpha\beta>0 \Leftrightarrow \alpha>0$ 且 $\beta>0$　(C) $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ 且 $\beta=\delta$
(D) $\alpha\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ 且 $\beta\neq 0$　(E) $\alpha^2+\beta^2=0$ 且 $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ 且 $\beta=0$

$\boxed{解析}$：(A)（╳）：例，$\alpha=i, \beta=1$。
(B)（╳）：複數體不能排序。
(C)（╳）：例，$\alpha=2i, \beta=1, \gamma=3i, \delta=0$ 。
(D)（○）
(E)（○）

三、填充題 (每題 10 分)

1、設 $a,b\in\square$ ，且 $\dfrac{2a+i}{4+3i}$ 的共軛複數為 $-5+bi$ ，則 $a+b=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{2a+i}{4+3i}=\dfrac{(2a+i)(4-3i)}{25}=\dfrac{(8a+3)+(4-6a)i}{25}=\overline{-5+bi}$

$\therefore\begin{cases}8a+3=-125\\4-6a=-25b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-16\\b=-4\end{cases}$ ，$\therefore a+b=-16+(-4)=-20$

2、設 $z=2+yi$ $(y\in\square)$，且 $\dfrac{1}{z}$ 之虛部為 $\dfrac{1}{5}$ ，則 $z=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2+yi}=\dfrac{2-yi}{4+y^2}$

$\therefore\dfrac{-y}{4+y^2}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow y^2+5y+4=0\Rightarrow(y+1)(y+4)=0\Rightarrow y=-1$ 或 -4 ，$\therefore z=2-i$ 或 $2-4i$

3、設 $x,y\in\square$ ，$(1+i)(x+y)+(5-4i)(2x-y)=-1-8i$ ，則數對 $(x,y)=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\because x+y+xi+yi+10x-5y-8xi+4yi=-1-8i$

$\Rightarrow(11x-4y)+(-7x+5y)i=-1-8i$ ，$\therefore\begin{cases}11x-4y=-1\\-7x+5y=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ ，故 $(x,y)=(1,3)$

4、設 $1-2i$ 是實係數方程式 $x^2+ax+b=0$ 之一根，則數對 $(a,b)=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$1-2i$ 代入 $x^2+ax+b=0$ ，$(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0$

$\Rightarrow1-4i-4+a-2ai+b=0\Rightarrow(-4-2a)i+(a+b-3)=0$

$\therefore\begin{cases}-4-2a=0\\a+b-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$ 故 $(a,b)=(-2,5)$

5、設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，求下列各式之值：

(1) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=$______ 。

(2) $\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{2000}=$______ 。

(3) $(1-2\omega-2\omega^2)(2+2\omega-3\omega^2)(3-4\omega+3\omega^2)=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：由題意已知 $\omega^3=1,1+\omega+\omega^2=0$

(1) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=(1+\omega+\omega^2+\omega^3)^2=1$

(2) $2000\div3=666\cdots2\Rightarrow$ 原式 $=\omega+\omega^2=-1$

(3)原式 $=(3)\times(-5\omega^2)\times(-7\omega)=105\omega^3=105$

6、設 $x\in\square$ ，且 $i(x+i)^3$ 為實數，則 $x=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$i(x^3+3x^2i+3xi^2+i^3)=i(x^3-3x+(3x^2-1)i)=-(3x^2-1)+(x^3-3x)i$ 為實數

$\therefore x^3-3x=0\Rightarrow x(x^2-3)=0\Rightarrow x=0$ 或 $\pm\sqrt{3}$

7、設 $a\in\square$ ，$\left|\dfrac{(1-2i)^3\cdot(a+i)^2}{\sqrt{5}(a-3i)^2}\right|=\dfrac{5}{3}$ ，則 $a=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{\sqrt{5}^3\cdot(\sqrt{a^2+1})^2}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{a^2+9})^2}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\dfrac{5(a^2+1)}{a^2+9}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow3a^2+3=a^2+9\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$

8、設 a 與 $a+2$ 為異號的兩實數，且均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，則 $k=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\because a$ 與 $a+2$ 為異號 $\Rightarrow a<0,a+2>0$ 代入方程式得

$a^2+|a|+3k=0 \Rightarrow a^2-a+3k=0 \cdots\cdots$①

$(a+2)^2+|a+2|+3k=0 \Rightarrow (a+2)^2+(a+2)+3k=0 \cdots\cdots$②

②−① 得 $(a+2)^2+(a+2)-a^2+a=0$

$6a+6=0 \Rightarrow a=-1$ 代入①，$1+1+3k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$

9、設 m 爲有理數，方程式 $x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$ 之根亦爲有理數，則 $k=$______。

答案：判別式 $=(4-4m)^2-4(3m^2-2m+4k)$

$=4m^2-24m+(16-16k)=4[m^2-6m+(4-4k)]$ 爲完全平方數

$\therefore 6^2-4\cdot 1\cdot(4-4k)=0 \Rightarrow 36-16+16k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{20}{16}=-\dfrac{5}{4}$

10、設 $f(x)=x^{100}+x^{50}+1$，分別求(1) $f(i)=$______ (2) $f(-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})=$______。

答案：(1) $f(i)=i^{100}+i^{50}+1=1-1+1=1$

(2) $f(-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})=(-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{100}+(-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{50}+1=(i)^{50}+(i)^{25}+1=-1+i+1=i$

11、設 $a\neq 0$，實係數方程式 $ax^3+x^2+bx+1=0$ 有一根 $2+\sqrt{2}i$，則 $a+b=$______。

答案：$a(2+\sqrt{2}i)^3+(2+\sqrt{2}i)^2+b(2+\sqrt{2}i)+1=0$

$\Rightarrow a(-4+10\sqrt{2}i)+(2+4\sqrt{2}i)+b(2+\sqrt{2}i)+1=0$

$\Rightarrow (-4a+2b+3)+(10a+b+4)\sqrt{2}i=0$

$\therefore \begin{cases}-4a+2b=-3\\ 10a+b=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{5}{24}\\ b=-\dfrac{23}{12}\end{cases}$ 故 $a+b=-\dfrac{5}{24}-\dfrac{23}{12}=-\dfrac{51}{24}=-\dfrac{17}{8}$

12、m 爲實數，$z=(\dfrac{m^2-5m-6}{m-2})+(\dfrac{m^2-m-6}{m+1})i$，當 $m=$______時，z 爲實數；當 $m=$______時，z 爲純虛數。

答案：3 或 -2, 6

解析：z 爲實數，$\therefore \dfrac{m^2-m-6}{m+1}=0 \Rightarrow m=3$ 或 -2

z 爲純虛數 $\dfrac{m^2-5m-6}{m-2}=0$ 且 $\dfrac{m^2-m-6}{m+1}\neq 0 \Rightarrow m=6$ 或 -1(不合)

13、設 a, b 爲實數 $\dfrac{1}{2-3i}+\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$，則 $a=$______, $b=$______。

答案：$\dfrac{9}{17}, \dfrac{19}{17}$

解析：$\dfrac{1}{2-3i}+\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}-\dfrac{2+3i}{13}\ \dfrac{9+19i}{17}$

$\therefore a+bi=\dfrac{26}{9-19i}=\dfrac{26(9+19i)}{442}=\dfrac{9+19i}{17}$ $\therefore a=\dfrac{9}{17}, b=\dfrac{19}{17}$

14、設 $1-2i+3i^2-4i^3+\cdots-60i^{59}=a+bi$，$a, b$ 爲實數，則 $a=$______, $b=$______。

答案：-30, 30

解析：$1-2i-3+4i+5-\cdots+60i=(1-3+5-\cdots-59)+(-2+4-6+8-\cdots+60)i=-30+30i$

15、令 $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，則 $z^{10}+z^{12}+\cdots+z^{50}=$____。

答案：$-i$

解析：$z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ z^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$，$(-i)^5+(-i)^6+\cdots+(-i)^{25}=\dfrac{(-i)^5[1-(-i)^{21}]}{1-(-i)}=\dfrac{(-i)(1+i)}{(1+i)}=-i$

16、求 $24-7i$ 的平方根，則解爲______或______。

答案：$\dfrac{7}{\sqrt{2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{2}}i,\ \ \dfrac{-7}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

解析：$z^2=24-7i$ 設 $z=a+bi,\ z^2=a^2-b^2+2abi$

$\therefore\begin{cases}a^2-b^2=24\\2ab=-7\end{cases},\ b=\dfrac{-7}{2a}$ 代入得 $4a^4-96a^2+49=0$

$\therefore(2a^2+1)(2a^2-49)=0\Rightarrow a=\pm\dfrac{7}{\sqrt{2}}$

$a=\dfrac{7}{\sqrt{2}},\ b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $a=\dfrac{-7}{\sqrt{2}},\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow z=\dfrac{7}{\sqrt{2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{2}}i$ 或 $z=\dfrac{-7}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

17、設 $z=\dfrac{(1+i)^2(4-3i)}{(2-i)^2}$，則 $|z|=$______。

答案：2

解析：$|z|=\dfrac{|1+i|^2|4-3i|}{|2-i|^2}=\dfrac{(\sqrt{2})^2\times5}{(\sqrt{5})^2}=2$

18、設 α,β 爲方程式 $x^2+6x+1=0$ 的二根，求 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=$______。

答案：$2\sqrt{2}i$

解析：利用根與係數的關係，$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta=-6\\\alpha\beta=1\end{cases}$ 且 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\therefore\begin{cases}\alpha<0\\\beta<0\end{cases}$

$\therefore(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-8$

$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$（負不合），$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}i$。

19、設 a 爲實數，若方程式 $x^2+(3a+2-i)x+(2a-i)=0$ 有實根，試求 $a=$______，另一虛根爲______。

答案：-1；$2+i$

解析：設實根爲 α，另一虛根爲 β

$\alpha^2+(3a+2-i)\alpha+(2a-i)=0$

$\Rightarrow\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a-(\alpha+1)i=0\ \therefore\begin{cases}\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a=0\cdots\cdots①\\\alpha+1=0\cdots\cdots②\end{cases}$

由② $\alpha=-1$ 代入①　$1-3a-2+2a=0\Rightarrow a=-1$

又 $\alpha+\beta=-(3a+2-i)\Rightarrow-1+\beta=1+i\Rightarrow\beta=2+i$，$\therefore a=-1$，另一虛根爲 $2+i$。

20、設 a 爲實數，方程式 $x^2-(a+i)x-(3+i)=0$ 有一實根，(1)求 a 之值；(2)解此方程式。

答案：原方程式：$(x^2-ax-3)-(x+1)i=0$ 有一實根

$\therefore x=-1$，代入得 $x^2-ax-3=0$，$1+a-3=0\Rightarrow a=2$

$(x^2-2x-3)-(x+1)i=0 \Rightarrow (x+1)[(x-3)-i]=0 \Rightarrow x=-1$ 或 $x=3+i$

$\therefore$ 兩根為 -1 或 $3+i$

21、解方程式：$6(x-\frac{1}{x})^2+7(x-\frac{1}{x})-24=0$。

答案：$(3(x-\frac{1}{x})+8)(2(x-\frac{1}{x})-3)=0$ $\quad\begin{array}{ccc}3 & & 8\\ & \times & \\ 2 & & -3\end{array}$

$\Rightarrow (3x^2+8x-3)(2x^2-3x-2)=0$

$\Rightarrow (3x-1)(x+3)(2x+1)(x-2)=0$，$\therefore x=\frac{1}{3},-3,-\frac{1}{2},2$

22、複數平面上，所有滿足 $|z-1-i|=|z+i|$ 的 z 點所成的圖形為何？

答案：令 $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$

$|x+yi-1-i|=|x+yi+i| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2+y^2+2y+1 \Rightarrow 2x+4y+1=0$，在複數平面上，表一直線

23、設 α,β 為方程式 $x^2+2x+3=0$ 的兩根，求以 $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$ 為二根的二次方程式。

答案：由題意：$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$

又 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{4-6}{3}=-\frac{2}{3}$，且 $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$

$\therefore$ 以 $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$ 為二根之方程式為 $x^2+\frac{2}{3}x+1=0$，即 $3x^2+2x+3=0$

24、方程式 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}=5$ 之實根為何？

答案：令 $a=x^2-3x-1$

$\therefore 2(a+1)-5\sqrt{a}=5 \Rightarrow 2a-3=5\sqrt{a} \Rightarrow (2a-3)^2=25a \Rightarrow 4a^2-37a+9=0$

$\Rightarrow (4a-1)(a-9)=0$，$\Rightarrow a=\frac{1}{4}$(不合)或 9（$\because 2a-3>0$）

則 $x^2-3x-1=9 \Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow x=5$ 或 -2

25、方程式 $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{5}{2}$ 之實根為何？

答案：令 $a=\frac{x^2+4x+1}{x^2+2} \Rightarrow \frac{1}{a}+a=\frac{5}{2} \Rightarrow 2a^2-5a+2=0 \Rightarrow a=2$ 或 $\frac{1}{2}$

若 $a=2$，則 $\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=2 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1$ 或 3

若 $a=\frac{1}{2}$，則 $\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+8x=0 \Rightarrow x=0$ 或 -8

$x=1,3,0$ 或 -8

26、求實數 k 之範圍使 $x^2-kx+4=0$ 之兩根皆大於 1。

答案：判別式 $=k^2-4\cdot4\geq0 \Rightarrow k\geq4$ 或 $k\leq-4\cdots\cdots$①

令兩根 α,β 且 $\alpha>1,\beta>1$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)>0 \Rightarrow \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$，又 $\because \alpha+\beta=k, \alpha\beta=4$

$\therefore 4-k+1>0 \Rightarrow k<5\cdots\cdots$②

由①, ②得$4 \le k < 5$

27、(1)設 z 爲複數且 $z^2 = 21+20i$ ，則 $z=$ ？(2)求 $x^2+3x-(3+5i)=0$ 之二根爲何？

答案：(1)設 $z = a+bi(a,b\in \mathbb{R})$

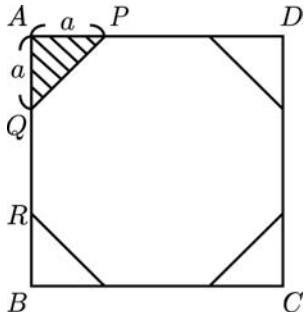
$$z^2 = a^2-b^2+2abi = 21+20i$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=21 \\ 2ab=20 \end{cases} \Rightarrow a=5,b=2 \text{ 或 } a=-5,b=-2\text{ , }\therefore z=5+2i \text{ 或 } -5-2i$$

(2) $x^2+3x-(3+5i)=0 \Rightarrow 9+4(3+5i)=21+20i$

$$\therefore x = \frac{-3+(21+20i)\text{的平方根}}{2}\text{，}\therefore x=\frac{-3+5+2i}{2}=1+i \text{ 或 } x=\frac{-3-5-2i}{2}=-4-i$$

29、設有一邊長爲 4 公分的正方形，今截去其四角使它成爲正八邊形，求此正八邊形的邊長及面積。



答案：如下圖，設 $\overline{AP}=a$ 公分，

由 $\overline{PQ}=\overline{QR}$ 得 $\sqrt{2}a=4-2a$ ，$\Rightarrow a=\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}=2(2-\sqrt{2})$ ，

故此正八邊形的邊長爲 $\overline{QR}=4-2a=4\sqrt{2}-4$ ，

且正八邊形的面積$=16-4\times\dfrac{1}{2}a^2=32\sqrt{2}-32$ (平方公分)。

30、一聯立方程組 $\begin{cases} xy=-2+11i \\ x^2+y^2=4+28i \end{cases}$ ，則

(1) (　　) 上列方程組有幾組解？(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　(E)5

(2) (　　) x 之值可爲哪些？(A) $-1-2i$　(B) $1-2i$　(C) $3+4i$　(D) $3-4i$　(E) $4+3i$

答案：(1) (D)　(2) (A)(E)

解析：(2) $\begin{cases} xy=-2+11i\cdots\cdots① \\ x^2+y^2=4+28i\cdots\cdots② \end{cases}$

由②+①×2 $\Rightarrow x^2+y^2+2xy=50i$

$\Rightarrow (x+y)^2=25(1+i)^2$

$\Rightarrow x+y=\pm5(1+i)$

又由②−①×2 $\Rightarrow x^2+y^2-2xy=8+6i$

$\Rightarrow (x-y)^2=(3+i)^2$

$\Rightarrow x-y=\pm(3+i)$

$x+y$	$5+5i$	$5+5i$	$-5-5i$	$-5-5i$
$x-y$	$3+i$	$-3-i$	$3+i$	$-3-i$
x	$4+3i$	$1+2i$	$-1-2i$	$-4-3i$

$\Rightarrow 2=4m$, 故 $m=\dfrac{1}{2}$