高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：98.09.11					
範圍	Book1 整數、有理數	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

(　　)1. 設 x，y，z 爲自然數，若$(x，y) = 21$，$(y，z) = 56$，則$(x，y，z)$之值爲

(A) 1　(B) 7　(C) 9　(D) 21　(E) 28

【解答】(B)

【詳解】$(x，y，z) = (\,(x，y)，(y，z)\,) = (21，56) = 7$，故選(B)

(　　)2. 已知六位數 $3ab548$ 爲 99 之倍數，則 $a + 2b$ =(A) 10　(B) 9　(C) 8　(D) 7　(E) 6

【解答】(C)

【詳解】

$3ab548$ 爲 99 的倍數　∴　$3ab548$ 爲 9 的倍數亦爲 11 的倍數

∵　$3ab548$ 爲 9 的倍數　∴　$9 \mid 3 + a + b + 5 + 4 + 8$

$\Rightarrow\ 9 \mid a + b + 20\ \Rightarrow\ 9 \mid a + b + 2\ \Rightarrow\ a + b = 7$ 或 16……①

又 $3ab548$ 爲 11 的倍數　∴　$11 \mid 3 - a + b - 5 + 4 - 8$

$\Rightarrow\ 11 \mid b - a - 6\ \Rightarrow\ b - a = 6$ 或 -5……②

由①②知$\begin{cases} a+b=7 \\ b-a=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=7 \\ b-a=-5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=16 \\ b-a=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=16 \\ b-a=-5 \end{cases}$

則由第二組知 $a = 6$，$b = 1\ \Rightarrow\ a + 2b = 6 + 2 = 8$

(　　)3. 下列各數，何者爲質數？

(A) 667　(B) 677　(C) 687　(D) 767　(E) 1547

【解答】(B)

【詳解】

(A) $667 = 23 \times 29$，故爲合成數

(B) $p^2 \le 677$ 的質數 p 有 2，3，5，7，11，13，17，19，23，分別去除 677，皆不能整除，故 677 爲質數

(C) $687 = 3 \times 229$，故爲合成數

(D) $767 = 13 \times 59$，故爲合成數

(E) $1547 = 7 \times 13 \times 17$，故爲合成數

(　　)4. 設 m，$n \in N$ 且 $m > 1$，若 $m \mid (35n + 26)$，$m \mid (7n + 3)$，則 m =(A) 5(B) 7(C) 11(D) 13(E) 17

【解答】(C)

【詳解】

$m \mid (35n + 26)$且 $m \mid (7n + 3)\ \Rightarrow\ m \mid (35n + 26) - 5(7n + 3) = 11$，又 $m > 1$　∴　$m = 11$

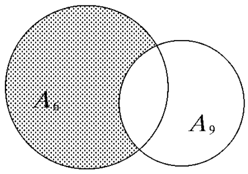
(　　)5. 不大於 500 的自然數中，是 6 的倍數不是 9 的倍數者有幾個？

(A) 55　(B) 56　(C) 57　(D) 70　(E) 71

【解答】(B)

【詳解】

所求 $= n(A_6) - n(A_{18})$，其中 A_k 爲 k 的倍數所成集合 $= [\frac{500}{6}] - [\frac{500}{18}] = 83 - 27 = 56$



二、填充題(每題 10 分)

1. 設 a，b 是有理數，且滿足$(2a-b)+(3a-\frac{b}{2})\sqrt{3}=\sqrt{3}$ ，則數對$(a，b)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{1}{2}，1)$

【詳解】

$\because\ (2a-b)+(3a-\frac{b}{2})\sqrt{3}=\sqrt{3}=0+1\cdot\sqrt{3}$ 且 $2a-b\in Q$，$3a-\frac{b}{2}\in Q$

$\therefore\ \begin{cases}2a-b=0\cdots\cdots①\\ 3a-\frac{b}{2}=1\cdots\cdots②\end{cases}$

由①$b=2a$ 代入② $\Rightarrow\ 3a-a=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{2}$代入① $\Rightarrow\ b=1,\ \therefore\ (a，b)=(\frac{1}{2}，1)$

2. 有一個五位數 $17a1b$ 含有因數 5 與 9，求此五位數爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】17010，17910，17415

【詳解】

$17a1b$ 含有 5 及 9 的因數 $\therefore\ b=0$ 或 5

① $b=0$，$9\mid 17a10\ \Rightarrow\ 9\mid 1+7+a+1+0=9+a\ \therefore\ a=0$ 或 9

② $b=5$，$9\mid 17a15\ \Rightarrow\ 9\mid 1+7+a+1+5=14+a\ \therefore\ a=4$

$\therefore$ 此五位數爲 17010，17910，17415

3. 設 $x\in N$，$f(x)$表$\sqrt{x}$的整數部分，則 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$之值爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】625

【詳解】

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=\overbrace{1+1+1}^{2^2-1^2\text{個}}+\overbrace{2+2+\cdots+2}^{3^2-2^2\text{個}}+\cdots+\overbrace{9+9+\cdots+9}^{10^2-9^2\text{個}}+10$

$=1(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+3(4^2-3^2)+\cdots+9(10^2-9^2)+10$

$=1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+9(19)+10=625$

4. 試寫出滿足 $|2x-1|<3$ 之所有整數 x 爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】0，1

【詳解】 $|2x-1|<3\ \Rightarrow\ -3<2x-1<3\ \Rightarrow\ -2<2x<4\ \Rightarrow\ -1<x<2$

故所求整數 x 爲 0，1

5. a，$b\in R$，若 $|ax+1|\le b$ 之解爲「$-2\le x\le 4$」，求數對$(a，b)$爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(-1，3)$

【詳解】

$-2\le x\le 4\ \Rightarrow\ (-2-1)\le(x-1)\le(4-1)$

$|x-1|\le 3\ \Rightarrow\ |-x+1|\le 3$ 與 $|ax+1|\le b$ 同義，即 $a=-1$，$b=3$

6. 設 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=a+b$，其中 $a\in Z$，$0<b<1$，則$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2-b}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{6}{7}$

【詳解】

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}=4+(\sqrt{2}-1)\quad\Rightarrow\quad a=4$，$b=\sqrt{2}-1$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2-b}=\frac{1}{3+\sqrt{2}}+\frac{1}{2-(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{3+\sqrt{2}}+\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{6}{7}$$

7. 設 a，b 爲有理數且滿足$(4a+3b)+3\sqrt{3}=1+(2a-6b)\sqrt{3}$，則 $a+b$ 的值爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{6}$

【詳解】

$$(4a+3b)+3\sqrt{3}=1+(2a-6b)\sqrt{3}\quad\Rightarrow\begin{cases}4a+3b=1\\2a-6b=3\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{-1}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}+\frac{-1}{3}=\frac{1}{6}$$

8. 正整數 a，$150\le a\le 400$，使得 x，y 的方程式 $ax+90y=10$ 有整數解。這樣的 a 共有_______個。

【解答】167

【詳解】

方程式 $ax+90y=10$ 有整數解 $\Leftrightarrow$ $(a，90)\mid 10$，則$(a，90)=1，2，5，10$

(1) $(a，90)=1$

共有$(400-149)-\{([\frac{400}{2}]-[\frac{149}{2}])+([\frac{400}{3}]-[\frac{149}{3}])+([\frac{400}{5}]-[\frac{149}{5}])-([\frac{400}{6}]-[\frac{149}{6}])-([\frac{400}{10}]-[\frac{149}{10}])-([\frac{400}{15}]-[\frac{149}{15}])+([\frac{400}{30}]-[\frac{149}{30}])\}=66$

(2) $(a，90)=2$，令 $a=2a_1$，$150\le 2a_1\le 400\quad\Rightarrow 75\le a_1\le 200$，又$(2a_1，90)=2\quad\Rightarrow(a_1，45)=1$

共有$(200-74)-\{([\frac{200}{3}]-[\frac{74}{3}])+([\frac{200}{5}]-[\frac{74}{5}])-([\frac{200}{15}]-[\frac{74}{15}])\}=67$

(3)$(a，90)=5$，令 $a=5a_2$，$150\le 5a_2\le 400\quad\Rightarrow 30\le a_2\le 80$，又$(5a_2，90)=5\quad\Rightarrow\quad(a_2，18)=1$

共有$(80-29)-\{([\frac{80}{2}]-[\frac{29}{2}])+([\frac{80}{3}]-[\frac{29}{3}])-([\frac{80}{6}]-[\frac{29}{6}])\}=17$

(4)$(a，90)=10$，令 $a=10a_3$，$150\le 10a_3\le 400\Rightarrow 15\le a_3\le 40$，又$(10a_3，90)=10\Rightarrow(a_3，9)=1$

共有$(40-14)-([\frac{40}{3}]-[\frac{14}{3}])=17$

由(1)(2)(3)(4)得 a 共有 $66+67+17+17=167$ 個

9. $(2993)^{74687}$的乘積除以 10 所得餘數爲__________。

【解答】7

【詳解】

利用$(2993)^1=\cdots 3$（個位數字爲 3）；$(2993)^2=\cdots 9$（個位數字爲 9）；

$(2993)^3=\cdots 7$（個位數字爲 7）；$(2993)^4=\cdots 1$（個位數字爲 1）

3,9,7,1 爲一周期$\Rightarrow 74687\div 4=18671......3$

$\therefore$ $(2993)^{74687}$的個位數字爲 7，除以 10 所得餘數爲 7

10.$a \in N$，若 $3a-5 \mid 7a+9$，則合乎條件的 a 有__________個。

【解答】3

【詳解】

已知$(3a-5) \mid (7a+9)$，又$(3a-5) \mid (3a-5)$，則$(3a-5) \mid 3(7a+9)-7(3a-5) \quad \Rightarrow \quad (3a-5) \mid 62$

$3a-5=1$，-1，2，-2，31，-31，62，-62，$a=2$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{7}{3}$，1，12，$-\dfrac{26}{3}$，$\dfrac{67}{3}$，-19

$\because \quad a \in N \quad \therefore \quad a=1$，$2$，$12$，故合乎條件的 a 有 3 個

11.求 6321×835799 除以 11 的餘數爲__________。

【解答】1

【詳解】

$6321=11a+7$（其中 $a=574$），$835799=11b+8$（其中 $b=75981$）

$6321 \times 835799=(11a+7)(11b+8)=11(11ab+8a+7b)+56=11(11ab+8a+7b+5)+1$

故所求餘數爲 1

12.a 是整數，則滿足 $a^3 \mid 2^7 \times 3^4 \times 5^3$ 的 a 共__________個。

【解答】24

【詳解】

$a^3 \mid 2^0$，2^3，2^6；$a^3 \mid 3^0$，3^3；$a^3 \mid 5^0$，5^3

$\therefore \quad$ 此種 a 共$(3 \times 2 \times 2) \times 2 = 24$ 個（注意 a 可能小於 0）

13.若 a，b，q_1，q_2，q_3 均爲正整數，且合於下列條件

①$a=bq_1+8472$；②$b=8472q_2+444$；③$8472=444q_3+36$，則 a，b 的最大公因數爲________。

【解答】12

【詳解】

$\because \quad a=bq_1+8472 \quad \therefore \quad (a，b)=(b，8472)$……①

$\because \quad b=8472q_2+444 \quad \therefore \quad (b，8472)=(8472，444)$……②

$\because \quad 8472=444q_3+36 \quad \therefore \quad (8472，444)=(444，36)$……③

$\xRightarrow{由①，②，③} \quad (a，b)=(444，36)=12$

14.兩正整數 a，b，$a>b$，且 $a+b=72$，$[a，b]=7(a，b)$，則 $a=$__________。

【解答】63

【詳解】

設 $d=(a，b)$，則 $a=dh$，$b=dk$，$h>k$ 且$(h，k)=1$

$\begin{cases} a+b=d(h+k)=72 \cdots\cdots ① \\ [a，b]=dhk=7d \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$，由②得 $hk=7$，即 $h=7$，$k=1$，代入①，得 $d=9$

故 $a=dh=9 \times 7=63$

15.設 $a \in N$，若$\dfrac{2a+7}{3a-5} \in N$，則 $a=$__________。

【解答】2 或 12

【詳解】

$(3a-5) \mid (2a+7)$且$(3a-5) \mid (3a-5) \quad \Rightarrow \quad (3a-5) \mid 3(2a+7)-2(3a-5)$

$\Rightarrow \quad (3a-5) \mid 31 \quad \Rightarrow \quad 3a-5=\pm 1，\pm 31 \quad \Rightarrow \quad a=2，12$

16.(1)求 6328 與 18645 之最大公因數__________。

(2)續上題，找出一組整數 m，n 使 $6328m + 18645n = (6328，18645)$，則數對$(m，n) =$______。

【解答】(1) 113　(2) (56，− 19)

【詳解】

(1)利用輾轉相除法

1	6328	18645	4
	5989	12656	
1	339	5989	17
	226	5763	
	113	226	2
		226	
		0	

∴　$(6328，18645) = 113$

(2)$18645 = 6328 \times 2 + 5989$……①；$6328 = 5989 \times 1 + 339$……②

$5989 = 339 \times 17 + 226$……③；$339 = 226 \times 1 + 113$……④

$226 = 113 \times 2 + 0$，由④$113 = 339 + 226 \times (-1)$

由③ $= 339 + (5989 - 339 \times 17)(-1) = 339 \times 18 + 5989 \times (-1)$

由② $= (6328 - 5989 \times 1) \times 18 + 5989 \times (-1) = 6328 \times 18 + 5989 \times (-19)$

由① $= 6328 \times 18 + (18645 - 6328 \times 2) \times (-19) = 6328 \times 56 + 18645 \times (-19)$

∴　$(m，n) = (56，-19)$

17.設成功高中一年級學生人數在 1000 至 1500 人之間，今將學生各以 5、7、13 人分組皆多出 3 人，則成功高中高一學生人數有__________人。

【解答】1368

【詳解】

學生人數是 5，7，13 的公倍數加 3，$[5，7，13] = 455$，則學生人數爲 $455k + 3$

因學生人數介在 1000 至 1500 人之間，則取 $k = 3$，有 $455 \times 3 + 3 = 1368$ 人

18.天干地支記日是以天干（甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸），地支（子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥）搭配，如甲子、乙丑、丙寅、…、癸亥，週期循環記日。已知民國 89 年 10 月 17 日是戊申日，推算民國 90 年 1 月 24 日（春節）以天干地支記日是__________日。

【解答】丁亥

【詳解】

$(31 - 17) + 30 + 31 + 24 = 99$，$99 \div 10 = 9 \cdots 9$

∴　天干爲丁，$99 \div 12 = 8 \cdots 3$　∴　地支爲亥

19.540 之正因數有__________個，所有正因數之和爲__________。

又滿足 $x^2 \mid 540$ 之整數 x 共有__________個。

【解答】24；1680；8

【詳解】

∵　$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5$

∴　正因數之個數爲$(2 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 24$

正因數之總和爲$(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)(5^0 + 5^1) = 1680$

又滿足 $x^2 \mid 540$ 之整數 x 的個數等於 $2(1 + 1)(1 + 1) = 8$

20.設 $r<s$，且 $a=\dfrac{r+s}{2}$，$b=\dfrac{r+2s}{3}$，$c=\dfrac{3r+s}{4}$，$d=\dfrac{3r+2s}{5}$，試比較 a，b，c，d 之大小次序

為__________。

【解答】$b>a>d>c$

【詳解】

$b-a=\dfrac{r+2s}{3}-\dfrac{r+s}{2}=\dfrac{2r+4s-3r-3s}{6}=\dfrac{s-r}{6}>0 \quad \therefore \quad b>a$

$a-d=\dfrac{r+s}{2}-\dfrac{3r+2s}{5}=\dfrac{5r+5s-6r-4s}{10}=\dfrac{s-r}{10}>0 \quad \therefore \quad a>d$

$d-c=\dfrac{3r+2s}{5}-\dfrac{3r+s}{4}=\dfrac{12r+8s-15r-5s}{20}=\dfrac{3(s-r)}{20}>0 \quad \therefore \quad d>c$

故 $b>a>d>c$

21.$n\in Z$，若 $p=4n^2-9n-9$ 為質數，則 $p=$__________。

【解答】19

【詳解】

$P=4n^2-9n-9=(n-3)(4n+3)$，$\because \quad P$ 為質數 $\quad \therefore \quad n-3=1$ 或 $4n+3=1$

當 $n-3=1$ 時，$n=4$，$P=19$；當 $4n+3=1$ 時，$n=\dfrac{-1}{2}$（不合）

22.設正整數 a，b，c 滿足$(a，b，c)+[a，b，c]=854$，且 $a:b:c=10:12:15$，則 $a+b+c=$__________。

【解答】518

【詳解】

令 $a=10k$，$b=12k$，$c=15k$（$k\in N$）$\Rightarrow \ (a，b，c)=k$， $[a，b，c]=60k$

則$(a，b，c)+[a，b，c]=k+60k=854 \quad \Rightarrow \quad k=14$，得 $a+b+c=37k=37\times 14=518$

23.當我們想證明 641 是一個質數時，至少需用 2，3，5，…等共幾個質數除之，即能確定？

答：__________個。

【解答】9

【詳解】$\sqrt{641}\doteqdot 25.3$，用 2，3，5，7，11，13，17，19，23 共 9 個質數除之，即能確定