2-1 矩陣加法與係數積

1. $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases}0\text{，}i=j\\1\text{，}i>j\\2\text{，}i<j\end{cases}$，則 A 的所有元的和為__9__。

解：$A=\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&2\\1&1&0\end{bmatrix}$，則 A 之所有元的和為 9

2. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&5&6\end{bmatrix}$，試選出以下正確的選項：(多選)

(A) 矩陣 A 有 3 列 2 行

(B) 矩陣 A 是 3×2 階矩陣

(C) 矩陣 A 的第二列第三行元是 6

(D) 矩陣 A 的轉置矩陣 $A^T=\begin{bmatrix}0&5&6\\1&2&0\end{bmatrix}$

(E) 矩陣 $-\frac{1}{7}A$ 的所有元的和為 -2

答：__(C)(E)__。

解：(A)(B)(C) 矩陣 A 是 2 列 3 行的 2×3 階矩陣，且第 (2 , 3) 元是 6

(D) $A^T=\begin{bmatrix}1&0\\2&5\\0&6\end{bmatrix}$

(E) $-\frac{1}{7}A$ 的所有元的和為 $-\frac{1}{7}(1+2+0+0+5+6)=(-\frac{1}{7})\cdot 14=-2$

3. 設 $\begin{bmatrix}a+3b&c+d\\d-c&a+2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\-2&3\end{bmatrix}$，試求 $a+b+c+d$ 之值。

解：因兩矩陣若相等，則相同位置的元相等，故 $\begin{cases}a+3b=5\\c+d=4\\d-c=-2\\a+2b=3\end{cases}$，

解得 $a=-1$，$b=2$，$c=3$，$d=1$，則 $a+b+c+d=5$

4. 若 $A=\begin{bmatrix}1&-4&5\\4&2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&0&1\end{bmatrix}$，則 $3A-5B=$ __$\begin{bmatrix}8&-22&0\\2&6&-5\end{bmatrix}$__。

解：$3A-5B=3\begin{bmatrix}1 & -4 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+5 & -12-10 & 15-15\\ 12-10 & 6-0 & 0-5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}8 & -22 & 0\\ 2 & 6 & -5\end{bmatrix}$

5. 設 $5A-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=2A-\begin{bmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\end{bmatrix}$，試求矩陣 $6A$。

解：將等式兩邊減法 $2A$，再加上 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，得 $5A-2A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -4 & 2\end{bmatrix}$，

即 $3A=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -4 & 2\end{bmatrix}$，因此 $6A=\begin{bmatrix}-8 & -4\\ -8 & 4\end{bmatrix}$

6. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足方程式 $A-2B+X=2C+B-2X$，且矩陣 X 的第二列第一行元為 a，第二列第二行元為 b，試求數對 (a,b)。

解：$\because A-2B+X=2C+B-2X\quad \therefore X+2X=2C+B-A+2B$

$3X=-A+3B+2C=-\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 12 & 0 & 5\end{bmatrix}$，

故得 $X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 12 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}\\ 4 & 0 & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore$ 矩陣 X 的第二列第一行元為 4，第二列第二行元為 0 $\Rightarrow(a,b)=(4,0)$

7. 兩矩陣 X、Y，滿足 $X+Y=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 且 $X-2Y=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$，則矩陣 $X=$ $\underline{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}}$

解：$\begin{cases}2X+2Y=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}\cdots\cdots\text{①}\\ X-2Y=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

①＋② $\Rightarrow 3X=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 9 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

8. 設 $2A+3B=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，$A-2B=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$，求矩陣 A^T+B^T。

解：$\begin{cases} 2A+3B=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ A-2B=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ 由① - ②×2 得 $7B=\begin{bmatrix} -1-6 & -2-12 \\ -5-16 & 4-4 \\ 3-10 & -1-6 \end{bmatrix}$

因 $7B=\begin{bmatrix} -7 & -14 \\ -21 & 0 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$，所以 $B=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$代入②，

則 $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，

故 $A^T+B^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2-2 矩陣乘法

1. 設 $A=\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}$，求 A^3。

解：$A^2=AA=\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\3&11\end{bmatrix}$，

$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}2&6\\3&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&22\\11&39\end{bmatrix}$

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3&0&-2\\-1&4&5\end{bmatrix}$，試求 $(A-I)(A-3I)(B-2C)$。

解：因 $(A-I)(A-3I)=\begin{bmatrix}0&0\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，

所以 $(A-I)(A-3I)(B-2C)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

3. 設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，試求 $A^2-5A-2I_2$。

解：因 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，所以 $A^2=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}$，又 $5A=\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}$，且 $2I_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$，

故 $A^2-5A-2I_2=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O_2$

4. 設矩陣 A 與 B 皆為 2 階方陣，I 是 2 階單位方陣，試問下列何者不恆為真？(多選)

(A) $(AB)^2=A^2B^2$

(B) $(A+I)^2=A^2+2A+I$

(C) 若 $A^2=O$，則 $A=O$

(D) 若 $A^2=I$，則 $A=I$ 或 $A=-I$

(E) 若 $A^2=A$，則 $A=O$ 或 $A=I$

答：__(A)(C)(D)(E)__。

解：(A) 錯誤：因 $(AB)^2=ABAB$，而 $A^2B^2=AABB$，若 $AB\neq BA$，則等式不一定成立

(B) 正確：$(A+I)^2=A(A+I)+I(A+I)=A^2+A+A+I=A^2+2A+I$

(C) 錯誤：反列：$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq O$，但 $A^2=O$

(D) 錯誤：反列：$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\neq I$ 或 $-I$，但 $A^2=I$

(E) 錯誤：反列：$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq O$ 或 I，但 $A^2=A$

5. 已知 $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -3 & 2 \\ \frac{9}{13} & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 6 & -4 & 9 \\ -3 & \frac{1}{11} & -1 \\ \sqrt{2} & -2 & 8 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 3 & -\frac{1}{11} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -7 \end{bmatrix}$，

求矩陣 $BA+CA$。

解：利用矩陣乘法分配律，得

$BA+CA=(B+C)A$

$$=\left(\begin{bmatrix} 6 & -4 & 9 \\ -3 & \frac{1}{11} & -1 \\ \sqrt{2} & -2 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 3 & -\frac{1}{11} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -7 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -3 & 2 \\ \frac{9}{13} & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -3 & 2 \\ \frac{9}{13} & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. LKK、SPG 二家電視台，在下午 8 時到 10 時的電視節目中，收視率各為$\frac{1}{2}$，現二電視台分別將這段時間內的節目革新，在首 8 個月內，收視率有下列的變化：LKK 台的原有觀眾，有 70%仍然看 LKK 台，30%改看 SPG 台；SPG 台的原有觀眾，有 60%改看 LKK 台，40%仍然看 SPG 台，假設這種現象仍然繼續，請寫出轉移矩陣。

解：轉移矩陣 $P=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$

7. 承第 6 題，假設這種現象仍然繼續，試問一年以後(即經過兩次變動)，二電視台的收視率。(請用百分比回答)

解：因轉移矩陣 $P=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$及起始狀態 $X_0=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$，則

$X_1=PX_0=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}$，$X_2=PX_1=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.665 \\ 0.335 \end{bmatrix}$，

故一年以後二電視台的收視率分別為 LKK 收視率 66.5%，SPG 收視率 33.5%

8. 承第 6 題，假設這種現象仍然繼續，如果以長期穩定情況來看，二電視台 LKK、SPG 的收視率分別為 x 與 y，試求 x 與 y (化為最簡分數)。

(若穩定狀態為 $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，則 $x+y=1$，且須滿足 $PX=X$，其中 P 為轉移矩陣。)

解：設穩定狀態為 $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，且 $x+y=1$，則須滿足 $PX=X$，即

$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，計算可得 $\begin{bmatrix} 0.7x+0.6y \\ 0.3x+0.4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，解之得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$。

故穩定狀穩時：二電視台的收視率分別為 LKK 收視率佔$\frac{2}{3}$，SPG 收視率佔$\frac{1}{3}$

1. 試寫出方程組$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x-2y+5z=-3 \\ x+2y-6z=5 \end{cases}$的係數矩陣與增廣矩陣。

解：係數矩陣：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$；增廣矩陣：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

2. 承第 1 題，將增廣矩陣化簡成$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$的形式，並求出此聯立方程式的解。

解：將方程組的增廣矩陣操作如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \times(-1)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{對調}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

故解為$(x,y,z)=(-1,-9,-4)$

3. 試利用增廣矩陣的列運算，求解方程組$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 2x-8y+7z=0 \end{cases}$。

解：$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-3),\ \times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times1}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由第三列可得$z=0$，代入第二列解得$y=0$，接著代入第一列解得$x=0$，

故解為$(x,y,z)=(0,0,0)$

4. 試利用增廣矩陣的列運算，求解方程組 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 8x+y-2z=-3 \\ 6x-3y-4z=5 \end{cases}$。

解：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-8),\ (-6)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -15 & -10 & -35 \\ 0 & -15 & -10 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -15 & -10 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

第三列表示 $0x+0y+0z=16$，此式無解，故原方程組無解

5. 若方程組 $\begin{cases} x-3y-5z=10 \\ 2x+y-3z=13 \\ 3x+2y-4z=19 \end{cases}$ 的解為 $\begin{cases} x=a+rt \\ y=b+st \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為任意實數，試求序組 (a,b,r,s)。

解：操作如右：$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ 3 & 2 & -4 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2),\ \times(-3)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 11 & 11 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \times\frac{1}{7} \\ \times\frac{1}{11} \end{matrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 3,\ \times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

最後的矩陣表示 $\begin{cases} x-2z=7 \\ y+z=-1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$，令 $z=t$，得解為 $\begin{cases} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為任意實數。

故得 $(a,b,r,s)=(7,-1,2,-1)$

6. 設 $\begin{cases} x=u+2v \\ y=u-v+w \\ z=u+3v-w \end{cases}$，$\begin{cases} u=a+b+c \\ v=2a+2b+c \\ w=a+b \end{cases}$，若 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，試求矩陣 P。

解：$\begin{cases} x=u+2v \\ y=u-v+w \\ z=u+3v-w \end{cases}$，所以 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$，

又 $\begin{cases} u=a+b+c \\ v=2a+2b+c \\ w=a+b \end{cases}$，則 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$，故矩陣 $P = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

7. 設方程組 $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+2y-z=a \end{cases}$ 有解，試求實數 a 的值。

解：$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times(-3)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 8 & a-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$

最後一式表示 $0x+0y+0z=a+1$，若方程組有解，則 $a+1=0$，得 $a=-1$

8. 設矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 5 \\ 2 & b & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & c \end{bmatrix}$ 經過矩陣列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求序組 (a,b,c)。

解：由題意得方程組 $\begin{cases} x-2y+az=5 \\ 2x+by-3z=-3 \\ 3x+y-2z=c \end{cases}$ 的解即為 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$，

將解代回方程組得 $\begin{cases} 1-2+2a=5 \\ 2+b-6=-3 \\ 3+1-4=c \end{cases}$，解得 $a=3$，$b=1$，$c=0$，故 $(a,b,c)=(3,1,0)$

2-4 行列式

1. 求下列各行列式的值：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$。 (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 8 \\ 5 & 13 & 27 \end{vmatrix}$。

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4+0+8-(-24)-0-(-12)=40$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 8 \\ 5 & 13 & 27 \end{vmatrix} = 0$ （因為第一列與第二列成比例）

2. 求行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6}+\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{vmatrix}$ 的值。

解：$\begin{vmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6}+\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & \sqrt{6}+\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{vmatrix}$

×(-1) ×(-1)

$= (-2)\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6}+\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{6} \end{vmatrix}$

$= (-2)(-6-6) = 24$ ×(-1) ×(-1)

3. 試求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}a & \sqrt{3}b & \sqrt{5}c \\ \sqrt{3}b+\sqrt{5}c & \sqrt{5}c+\sqrt{2}a & \sqrt{2}a+\sqrt{3}b \end{vmatrix}$ 之值。

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}a & \sqrt{3}b & \sqrt{5}c \\ \sqrt{3}b+\sqrt{5}c & \sqrt{5}c+\sqrt{2}a & \sqrt{2}a+\sqrt{3}b \end{vmatrix}$ ×1

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}a & \sqrt{3}b & \sqrt{5}c \\ \sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c & \sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c & \sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c \end{vmatrix} = 0$（第一、三列成比例）

4. 解不等式 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -5 & 25 \end{vmatrix} > 0$。

解：此為課本之 Vandermonde 行列式，

故 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -5 & 25 \end{vmatrix} = (x-4)(4+5)(-5-x) > 0$，即 $(x-4)(x+5) < 0$，解得 $-5 < x < 4$

5. 若 $\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{vmatrix} = 1005$，試求行列式 $\begin{vmatrix} 2a+3 & d & 1 \\ 2b+6 & e & 2 \\ 2c+9 & f & 3 \end{vmatrix}$ 之值。

解：$\begin{vmatrix} 2a+3 & d & 1 \\ 2b+6 & e & 2 \\ 2c+9 & f & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & d & 1 \\ 2b & e & 2 \\ 2c & f & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 2 \\ c & f & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & d & a \\ 2 & e & b \\ 3 & f & c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{vmatrix} = 2010$

×(-3)　　一、三行交換　　二、三行交換

6. 設 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(1,2)$，$B(4,10)$，$C(8,6)$，試求 $\triangle ABC$ 之面積。

解：$\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $= \frac{1}{2}|10+24+16-80-6-8| = \frac{1}{2}|50-94| = 22$

7. 設 $A(a,1)$，$B(a-3,7)$，$C(2,3)$ 為相異三點，若 A，B，C 三點共線，則 $a =$ __3__。

解：$A(a,1)$，$B(a-3,7)$，$C(2,3)$ 表共線之相異三點

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7a+2+3a-9-14-a+3-3a = 0 \Rightarrow 6a-18 = 0 \quad \therefore a = 3$

8. 已知 $\overrightarrow{OA} = (1,-1,3)$，$\overrightarrow{OB} = (2,-7,6)$，$\overrightarrow{OC} = (5,7,-9)$ 為空間中三向量，求此三向量所決定的平行六面體的體積。

解：平行六面體的體積 $= \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -9 \end{vmatrix}\right| = |63-30+42+105-18-42| = 120$

2-5 克拉瑪公式

1. 設方程組 $\begin{cases} x+2y+5z=1\text{，} \\ x-3y-3z=-1\text{，} \\ 3x-y+2z=2\text{。} \end{cases}$

(1) 利用克拉瑪公式，解此方程組。

(2) 並說明此方程組的幾何意義。

解：(1) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6-18-5+45-3-4=9$，

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6-12+5+30-3+4=18$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-9+10+15+6-2=18$，

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6-6-1+9-1-4=-9$，

所以 $x=\dfrac{18}{9}=2$，$y=\dfrac{18}{9}=2$，$z=\dfrac{-9}{9}=-1$

(2) 三平面相交於一點

2. 設 a 為實數，方程組 $\begin{cases} ax+y+z=1\text{，} \\ x+ay+z=1\text{，} \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 下列何者可使方程組恰有一解？(多選)

(A) $a=\pi$　　(B) $a=-1$　　(C) $a=\sqrt{7}$　　(D) $a=1$　　(E) $a=-2$

答：(A)(B)(C)。

解：有唯一解，表$\Delta\neq 0$，

$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$，

3. 說明方程組 $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ -x+2y-z=-4, \\ 2x-4y+2z=6 \end{cases}$ 解的幾何意義。

解：因為 $x-2y+z=4$， $-x+2y-z=-4$ 重合，且與 $2x-4y+2z=6$ 平行，
故幾何意義為兩平面重合且與另一平面平行。

4. 說明方程組 $\begin{cases} 2x-y+3z=4, \\ 4x-2y+6z=8, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 解的幾何意義。

解：因為 $2x-y+3z=4$ 與 $4x-2y+6z=8$ 為重合二平面，且法向量 $(2,-1,3)$ 與法向量 $(1,1,1)$ 不平行，故兩平面重合，另一平面與之交於一直線

5. 說明空間中三平面 $E_1: x+2y-3z=1$，$E_2: x+3y-2z=-1$，$E_3: x+y-4z=3$ 的相交情形。

解：$\begin{cases} x+2y-3z=1 \ldots\ldots ① \\ x+3y-2z=-1 \ldots\ldots ② \\ x+y-4z=3 \ \ldots\ldots ③ \end{cases}$，①－②：$-y-z=2 \ldots\ldots$④；①－③：$y+z=-2 \ldots\ldots$⑤

由④⑤知方程組有無限多組解，但三平面法向量無平行者，故三平面兩兩不重合，且交於一直線

6. 說明空間中三平面 $E_1: x+2y-3z=1$，$E_2: x+3y-2z=-1$，$E_3: x+y-4z=1$ 的相交情形。

解：$\begin{cases} x+2y-3z=1 \ldots\ldots ① \\ x+3y-2z=-1 \ldots\ldots ② \\ x+y-4z=1 \ \ldots\ldots ③ \end{cases}$，①－②：$-y-z=2 \ldots\ldots$④；①－③：$y+z=0 \ldots\ldots$⑤

由④⑤知方程組無解，三平面無共同交點，且三平面法向量無平行者，故三平面兩兩交於一直線，但三交線不共點

7. 設方程組 $\begin{cases} kx+2y+3z=1 \\ 2x+ky+3z=1 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$ 有無限多組解，求 k 的值。(有兩解)

解：$\Delta = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 2 & k & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(k^2-5k+6) = 3(k-2)(k-3)$，

因為方程組有無限多組解，所以$\Delta=0$，得 $k=2$ 或 $k=3$

(1) $k=2$ 時，$\begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ 2x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$ 有無限多組解；

(2) $k=3$ 時，$\begin{cases} 3x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+3z=1 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$ 有無限多組解，

故 $k=2$ 或 $k=3$

8. 給定方程組 $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+3y+\lambda z=3 \\ x-3y+3z=2 \end{cases}$，試求$\lambda$之值使方程組無解。

解：$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}=4\lambda+12$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & \lambda \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}=5\lambda+15$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-\lambda+2$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=5$，

令$\Delta=0$，得$\lambda=-3$，但$\Delta_y=\Delta_z\neq0$，故無解

（亦可將$\lambda=-3$代回原方程組，用加減消去法判斷。）

2-6 反方陣

1. 設方陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的反方陣。

解：利用二階乘法反方陣的公式，得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{5\times 1-(-2)\times(-2)}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

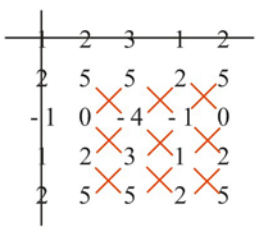
2. 承第 1 題，若 X 為 2×3 階矩陣，且滿足 $AX=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$，試求矩陣 X。

解：因 $AX=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$，

故 $X=A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 2 & -6 & 27 \end{bmatrix}$

3. 設方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$，求 A 的反方陣。

解：$\det A=-20-10+0+15+16-0=1$



$$\Rightarrow \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} -20 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -20 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 承第 3 題，若 X 為 3×1 階矩陣，且滿足 $AX=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$，試求矩陣 X。

解：因為 $AX=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$，所以 $X=A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -20 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

5. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ 2 & a & 3\\ 2 & -1 & a\end{bmatrix}$，若 A 沒有反方陣，試求 a 之值。

解：因 A 沒有反方陣，故 $\begin{vmatrix}1 & -5 & 4\\ 2 & a & 3\\ 2 & -1 & a\end{vmatrix}=0$，

展開整理後可得 $a^2+2a-35=0$，即 $(a-5)(a+7)=0$，得 $a=5$ 或 $a=-7$

6. 設 $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，若 $A=PBP^{-1}$，試求矩陣 B。

解：由 $A=PBP^{-1}$，得 $B=P^{-1}AP$，又 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，

則 $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$（為對角矩陣）

7. 承第 6 題，若 $A^8=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，求 $a-b+c-d=$？

解：因為 $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，則 $B^2=\begin{bmatrix}3^2 & 0\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}$，得 $B^4=(B^2)^2=\begin{bmatrix}3^4 & 0\\ 0 & 2^4\end{bmatrix}$，

所以 $B^8=(B^4)^2=\begin{bmatrix}3^8 & 0\\ 0 & 2^8\end{bmatrix}$

$A^8=(PBP^{-1})^8 \quad =PB^8P^{-1}$

$=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^8 & 0\\ 0 & 2^8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^9 & -2^8\\ -2\cdot 3^8 & 2^8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3^9-2^9 & 3^9-3\cdot 2^8\\ -2\cdot 3^8+2^9 & -2\cdot 3^8+3\cdot 2^8\end{bmatrix}$

所以 $a-b+c-d=(3^9-2^9)-(3^9-3\,.\,2^8)+(-2\,.\,3^8+2^9)-(-2\,.\,3^8+3\,.\,2^8)=0$

8. 設二階矩陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}11\\ -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}22\\ -17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$，若 $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$，

求 $a-2b+c+d$。

解：$\because A\begin{bmatrix}11\\ -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}22\\ -17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{bmatrix}11 & 22\\ -8 & -17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & 22\\ -8 & -17\end{bmatrix}^{-1}\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-17 & -22\\ 8 & 11\end{bmatrix}\right)$，

因 $\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $a-2b+c+d=-\frac{1}{11}(-17-16-22+11)=4$