隨堂測驗

11-1. 下列各選項中每一組數的和均為 10000，問哪一組數中兩數的乘積為最大？

(A) 1234，8766　(B) 5500，4500　(C) 6001，3999　(D) 5000，5000　(E) 19，9981

答：__(D)__。

解：由算幾不等式可知：兩正數 a 與 b 的和為定值時，當 $a=b$ 時，兩數的乘積有最大值。因為各組數的和均為 10000，所以當 $a=b=5000$ 時，兩數的乘積有最大值，故選(D)

11-2. 設 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=6$，求：

(1) xy^2 的最大值為__8__；此時 $x=$__2__，$y=$__2__。

(2) x^2y 的最大值為__16__；此時 $x=$__4__，$y=$__1__。

解：(1) $\dfrac{x+y+y}{3}\ge\sqrt[3]{xy^2}\Rightarrow 2\ge\sqrt[3]{xy^2}\Rightarrow xy^2\le 8$，即 xy^2 的最大值為 8，此時 $x=y=2$

(2) $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2y}{3}\ge\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{2}}\Rightarrow 2\ge\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{2}}\Rightarrow x^2y\le 16$，

即 x^2y 的最大值為 16，此時 $\dfrac{x}{2}=2y=2\Rightarrow x=4$，$y=1$。

11-3. 設 $x>0$，$y>0$，且 $x^2y=8$，求：

(1) $2x+y$ 的最小值為__6__；又最小值成立時，$x=$__2__，$y=$__2__。

(2) $x+2y$ 的最小值為__$3\sqrt[3]{4}$__；又最小值成立時，$x=$__$2\sqrt[3]{4}$__，$y=$__$\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$__。

解：(1) $\dfrac{x+x+y}{3}\ge\sqrt[3]{x^2y}\Rightarrow 2x+y\ge 3\sqrt[3]{8}\Rightarrow 2x+y\ge 6$，

即 $2x+y$ 的最小值為 6，此時 $x=y=2$

(2) $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2y}{3}\ge\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{2}}\Rightarrow x+2y\ge 3\sqrt[3]{4}$，

即 $x+2y$ 的最小值為 $3\sqrt[3]{4}$，此時 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}=2y=\sqrt[3]{4}\Rightarrow x=2\sqrt[3]{4}$，$y=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

11-4. 設 $y=x+\dfrac{9}{x+2}+4$，若 $x>-2$，則當 $x=$__1__時，y 有最小值為__8__。

解：$\because y=x+\dfrac{9}{x+2}+4=(x+2)+\dfrac{9}{x+2}+2$

又 $\dfrac{(x+2)+\frac{9}{x+2}}{2}\ge\sqrt{9}\Rightarrow(x+2)+\dfrac{9}{x+2}\ge 6$，$\therefore y\ge 6+2=8$，最小值為 8

此時 $x+2=\dfrac{9}{x+2}\Rightarrow(x+2)^2=9\Rightarrow x+2=\pm3$，但 $x>-2$，故 $x=1$

11-5. 已知實數 a，b，c 滿足 $a^2+b^2+c^2=9$，求：

(1) $2a-2b+c+1$ 之最大值為__10__。

【背面尚有試題】

(2) 此時序組 (a , b , c)＝__(2 , －2 , 1)__。

解：由柯西不等式可知 $(a^2+b^2+c^2)(2^2+(-2)^2+1^2)\ge(2a-2b+c)^2$，

得 $9\cdot 9\ge(2a-2b+c)^2$，即 $-9\le 2a-2b+c\le 9$

當“＝”成立時，$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{-2}=\dfrac{c}{1}=t$，$t$ 為實數，$a=2t$，$b=-2t$，$c=t$

此時 $2a-2b+c=9$，$t=1$，

故當 $t=1$ 時，$a=2$，$b=-2$，$c=1$，$2a-2b+c+1$ 有最大值 10

11-6. 設 $a+b+c=6$，求：

(1) $a^2+b^2+c^2$ 之最小值為__12__；(2) 此時序組 (a , b , c)＝__(2 , 2 , 2)__。

解：(1) 利用柯西不等式：

$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(a+b+c)^2$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge 36\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 12$，最小值 12

(2) 此時 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{1}$ 且 $a+b+c=6$　$\therefore(a,b,c)=(2,2,2)$

11-7. 設 a，b，$c>0$，求 $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 的最小值為__9__。

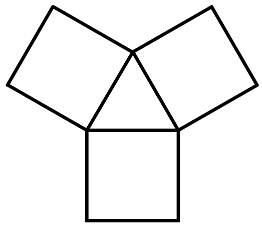
解：利用柯西不等式：

$\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right]\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right]\ge(1+1+1)^2$，

得 $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$

11-8. 由周長 6 之三角形的三邊分別向外作正方形，如右圖所示，

求三個正方形的面積和之最小值為__12__。



解：設三角形的三邊長為 x，y，z

則三個正方形的面積和為 $x^2+y^2+z^2$，且 $x+y+z=6$

由柯西不等式，$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(x+y+z)^2=6^2=36$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{36}{3}=12$

且等號成立的條件為 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}=t$，$t$ 為實數，且 $x+y+z=6\Rightarrow x=y=z=2$

故此三個正方形的面積和最小值為 12

【背面尚有試題】

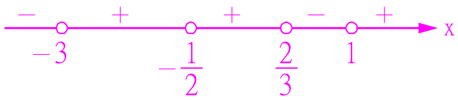
12-1. 解不等式 $(x-1)^3(3x-2)^5(x+3)^7(2x+1)^2>0$。

解：當 r 爲大於 1 的奇數時，$(x-a)^r$ 爲正或爲負與 $x-a$ 相同，

故原不等式與下列不等式有同解：

$(x-1)(3x-2)(x+3)(2x+1)^2>0$，

又 $(2x+1)^2$ 必爲正或 0，參考圖如下：(因不等式不含等號，故以空心表示各點)



故其解爲 $-3<x<\frac{2}{3}$ 或 $x>1$ 、但 $x\neq-\frac{1}{2}$

12-2. 解不等式 $\frac{3}{x+2}\geq x$。

解：移項通分式得 $\frac{3-x(x+2)}{x+2}\geq 0$，

$\frac{-x^2-2x+3}{x+2}\geq 0$，

即 $\frac{x^2+2x-3}{x+2}\leq 0$，

$\frac{(x+3)(x-1)}{x+2}\leq 0$，

此不等式之解爲 $(x+3)(x+2)(x-1)\leq 0$，但 $x\neq -2$，

故解爲 $x\leq -3$ 或 $-2<x\leq 1$

12-3. 解不等式 $\sqrt{x^2-25}>x-1$。

解： (i) $\begin{cases} x^2-25\geq 0 \\ x-1<0 \end{cases}$ 或(ii) $\begin{cases} x^2-25\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ x^2-25>(x-1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (i) $\begin{cases} x\leq -5 \text{ 或 } x\geq 5 \\ x<1 \end{cases}$ 或(ii) $\begin{cases} x\leq -5 \text{ 或 } x\geq 5 \\ x\geq 1 \\ x>13 \end{cases}$

由(i)(ii)得 $x\leq -5$ 或 $x>13$

12-4. 設兩點 $P(-2,5)$、$Q(4,-1)$ 與直線 L：$2x-3y+k=0$，試回答下列問題：

(1) 若 P、Q 兩點在直線 L 的同側，試求 k 的範圍。

(2) 若連接 P 與 Q 的線段與 L 相交，試求 k 的範圍。

解：(1) $P(-2,5)$、$Q(4,-1)$ 兩點在直線 L：$2x-3y+k=0$ 的同側，

$[2\times(-2)-3\times 5+k][2\times 4-3\times(-1)+k]>0$，

即 $(k-19)(k+11)>0$，故 k 的範圍爲 $k>19$ 或 $k<-11$

(2) 因 $\overline{PQ}$ 與直線 L 相交，$(k-19)(k+11)\leq 0$，故 $-11\leq k\leq 19$

【背面尚有試題】

12-5. 果園裡種了 20 棵檸檬樹，平均每棵年產 600 個檸檬，根據統計，在此果園中每加種一棵檸檬樹，則平均每棵年產量減少 10 個，請問應加種 __20__ 顆可使年產量最多。

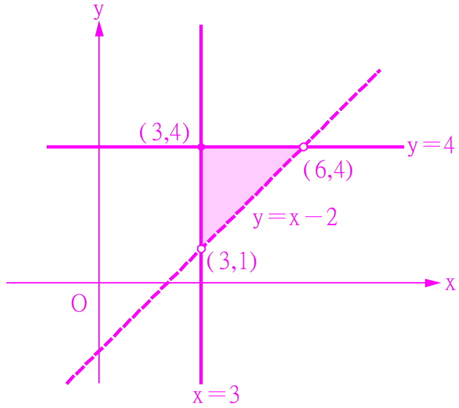
解：設應加種 x 棵，

產量：$f(x)=(20+x)(600-10x)=-10x^2+400x+12000=-10(x-20)^2+16000$

∴當 $x=20$ 時，可得最大產量 16000 個

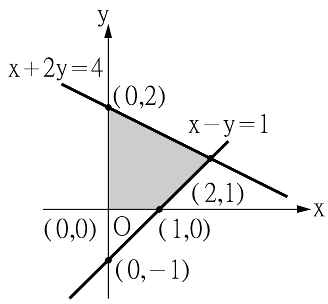
12-6. 圖解二元一次聯立不等式：$\begin{cases} x\ge 3 \\ y\le 4 \\ y>x-2 \end{cases}$。

解：作圖如右：



12-7. 寫出聯立不等式，使其圖形為圖中的四邊形區域 (含邊界)，並求四邊形面積。

解：由圖形知四邊形區域 (含邊界) 的聯立不等式為 $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x-y\le 1 \\ x+2y\le 4 \end{cases}$



四邊形面積 $=\frac{1}{2}\times 3\times 2-\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{5}{2}$

12-8. 設 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$。

(1) 描繪 $y=f(x)$ 的圖形。

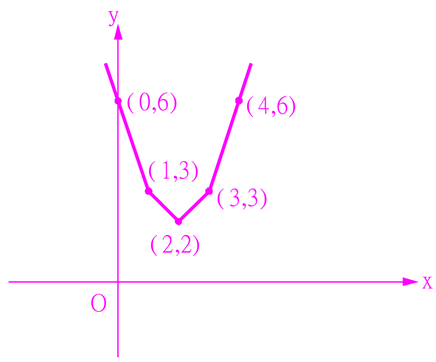
(2) 求 $f(x)$ 的最小值。

解：(1) 折線函數(依區間決定絕對值得正負)：$f(x)=\begin{cases} 3x-6，x\ge 3 \\ x，2\le x<3 \\ -x+4，1\le x<2 \\ -3x+6，x<1 \end{cases}$

因為 $f(0)=6$，$f(1)=3$，$f(2)=2$，

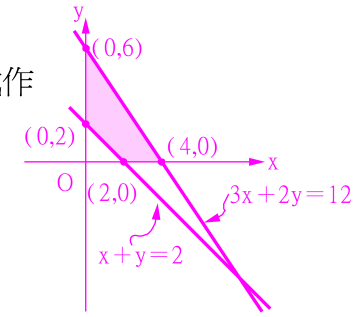
$f(3)=3$，$f(4)=6$，所以 $y=f(x)$ 的圖形如右：

(2) 由圖知，$f(x)$ 的最小值為 2



【背面尚有試題】

13-1. 若 x， y 滿足 $x\ge0$，$y\ge0$，$3x+2y-12\le0$，$x+y-2\ge0$，試作不等式組的圖形。



解：$x\ge0$，$y\ge0$，
$3x+2y-12\le0$，
$x+y-2\ge0$ 之圖形如右：

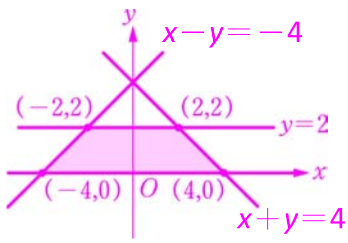
13-2. 承第 1 題，求 $3x+y-2$ 的最小值為 __0__，及此時之 (x,y)＝ __(0,2)__ 。

解：用頂點法如下：

(x,y)	$(0,6)$	$(4,0)$	$(2,0)$	$(0,2)$
$3x+y-2$	4	10	4	0

最小值為 0，此時之 $(x,y)=(0,2)$

13-3. 作不等式組 $\begin{cases}x+y\le4\\x-y\ge-4\\0\le y\le2\end{cases}$ 之圖形。



解：$\begin{cases}x+y\le4\\x-y\ge-4\\0\le y\le2\end{cases}$ 之圖形如右：

13-4. 承第 3 題，求：(1) $x+y$ 之最大值。　　(2) 不等式組所圍區域之面積。

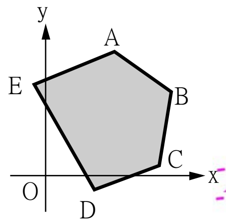
解：(1) 用頂點法如下：

(x,y)	$(2,2)$	$(-2,2)$	$(-4,0)$	$(4,0)$
$x+y$	4	0	-4	4

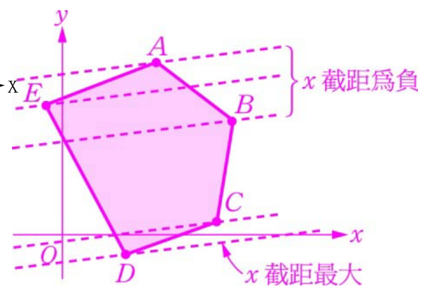
$x+y$ 之最大值為 4

(2) 所圍區域為一梯形，面積為 $\frac{1}{2}\times(4+8)\times2=12$

13-5. 圖中灰色部分的點坐標 (x,y) 代入 $x-10y=k$，則使 k 值最大的是哪一點？
(A) A 點　(B) B 點　(C) C 點
(D) D 點　(E) E 點



答：__(D)__ 。



解：$x-10y=k$ 表：斜率為 $\frac{1}{10}$、x 截距 k 之直線，
在斜率為 $\frac{1}{10}$ 之直線中，過 D 點之直線的 x 截距最大

13-6. 建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋。企劃部門的規劃如下：甲型屋每棟地價成本為 500 萬元，建築費用為 900 萬元；乙型屋每棟地價成本為 200 萬元，建築費用為 1500 萬元。公司在資金部分限制地價總成本上限為 3500 萬元，所有建築費用的上限為 1 億 2000 萬元；無論甲型或乙型售出，每棟獲利皆為 500 萬元。假設推出的預售屋皆可售出，且推出甲、乙兩型預售屋各 x、y 棟公司才可得到最大利潤 P。則除了 $x\ge0$，$y\ge0$ 及 x、y 皆為整數之條件外，寫下 x、y 必須滿足的不等式組。

　　【背面尚有試題】

解：由題意，設甲型屋 x 棟，乙型屋 y 棟，將題意作成如下表格：（單位：萬元）

	成本	建築費用
甲	500	900
乙	200	1500
總成本	3500	12000

則 $\begin{cases} 500x+200y \le 3500 \\ 900x+1500y \le 12000 \\ x \ge 0，y \ge 0 \end{cases}$，化簡可得 $\begin{cases} 5x+2y \le 35 \\ 3x+5y \le 40 \\ x \ge 0，y \ge 0 \end{cases}$

13-7.　承第 6 題，試以 x、y 表示 P。(單位：萬元)

解：$P=500x+500y$ (萬元)

13-8.　承第 6 題，求 P 之最大值爲__5000__萬元，及此時之 $x=$__5__，$y=$__5__。

解：因爲 $P=500(x+y)$ 爲獲利函數

用頂點法：(圖形如右)

	(0 , 0)	(7 , 0)	(5 , 5)	(0 , 8)
$x+y$	0	7	10	8

所以，當 $x=5$，$y=5$ 時，

P 最大利潤爲 5000 萬元