| 總　　分 |
| --- |
| |
| 測驗時間：20分鐘 |

# 數學 4 分段測驗卷

## 第 9 回

### 命題範圍：2-5 二項式定理

（程度／中）



____年____班____號

姓名______________

**一、單選題　(1 題 每題 16 分 共 16 分)**

(　　) 1. 在$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展開式中，常數項為　(1)32　(2) $-32$　(3)16　(4) $-16$　(5)0 .

**二、填充題　(7 格 每格 12 分 共 84 分)**

1. $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{12}$展開式中(1) $x^3$ 項的係數為____________ .　(2)常數項為____________ .

2. 以$11^2$除$111^{22}$所得餘數為____________ .

3. $\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^5$展開式中， $x^4$ 項的係數為 270，則 $a=$____________ .

4. $(x-y)^{20}$的展開式中，若依 $x$ 的降冪排列，則第三項為____________ .

5. $(1+x)^n$的展開式依升冪排列，若第五項、第六項、第七項的係數成等差數列，則 $n=$__________ .

6. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$展開式中，各實數項和為____________ .

答　案

**一、單選題　(1 題　每題 16 分　共 16 分)**

1. 5

**二、填充題　(7 格　每格 12 分　共 84 分)**

1. (1) $-220$ ;(2)495　2. 1　3. 3　4. $190x^{18}y^2$　5. 7 或 14　6. $-\dfrac{1}{2}$

解　析

**一、單選題　(1 題　每題 16 分　共 16 分)**

1. 一般項 $C_r^5(2x)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=C_r^5 2^{5-r}(-1)^r x^{5-r}x^{-r}$

常數項，$\Rightarrow 5-2r=0\Rightarrow r=\dfrac{5}{2}$（不合），$\therefore$無常數項，故常數項為 0．

**二、填充題　(7 格　每格 12 分　共 84 分)**

1. (1) 一般項 $C_r^{12}x^{12-r}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r=C_r^{12}(-1)^r x^{12-r}x^{-2r}$

$x^3$ 項的係數 $\Rightarrow 12-3r=3\Rightarrow r=3$，故 $x^3$ 項的係數為 $C_3^{12}(-1)^3=-220$．

(2) 常數項$\Rightarrow$令 $12-3r=0\Rightarrow r=4$，故常數項為 $C_4^{12}(-1)^4=495$．

2. $111^{22}=(1+110)^{22}=C_0^{22}1+C_1^{22}110^1+\cdots\cdots+C_{22}^{22}(110)^{22}=1+11^2k$，$\therefore$餘數為 1．

3. 一般項 $C_r^5(ax^2)^{5-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=C_r^5 a^{5-r}x^{10-2r}\cdot x^{-r}=C_r^5 a^{5-r}x^{10-3r}$

$x^4$ 項的係數 $270\Rightarrow 10-3r=4\Rightarrow r=2$ ，$C_2^5 a^3x^4=10a^3x^4$，$\therefore 10a^3=270\Rightarrow a=3$．

4. 第三項為 $C_2^{20}x^{18}(-y)^2=190x^{18}y^2$．

5. $(1+x)^n$ 展開式中依升冪排列的第 5 項、第 6 項、第 7 項的係數分別為 $C_4^n$ 、$C_5^n$ 與 $C_6^n$（$\because n\geq 6$），

$$2C_5^n=C_4^n+C_6^n\Rightarrow 2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$2\cdot\frac{(n-4)}{5}=1+\frac{(n-4)(n-5)}{6\times5}\Rightarrow n^2-21n+98=0\Rightarrow(n-7)(n-14)=0\Rightarrow n=7\text{ 或 }14．$$

6. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}=C_0^{10}(\frac{1}{2})^{10}+C_1^{10}(\frac{1}{2})^9(-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+C_2^{10}(\frac{1}{2})^8(-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2+\ldots\ldots+C_9^{10}(\frac{1}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^9+C_{10}^{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}$

各實數項和為 $C_0^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+C_4^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4+C_6^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6+C_8^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$

$+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}=-\frac{512}{1024}=-\frac{1}{2}$ .

[另解]

原式 $=\left[\cos\left(-60^\circ\right)+i\sin\left(-60^\circ\right)\right]^{10}=\cos\left(-600^\circ\right)+i\sin\left(-600^\circ\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$， $\therefore$ 實數項和為 $-\frac{1}{2}$ .