總　　分
測驗時間：20分鐘

數學 4 分段測驗卷

第 4 回

命題範圍：1-5 圓錐曲線的光學性質

（程度／中）

____年____班____號

姓名______________

一、填充題　(7 格 每格 12 分 共 84 分)

1. 設 $\Gamma: 2x^2+3y^2+4y-1=0$ 上一點 $A(1,-1)$，則切點為 A 的切線方程式為____________．
2. 一光線沿著 $y=4$ 的直線行進，射到拋物線 $y^2=4x+8$ 上的 P 點，反射後又射到拋物線上的 Q 點，則 Q 點的坐標為____________．
3. 直線 $y=2x+k$ 與 $y=x^2-5x+13$ 交於兩點 P 、 Q ，若 $\overline{PQ}=3$ ，則 $k=$____________．
4. 設直線 $2x+y=3$ 與雙曲線 $x^2-y^2=1$ 相交於 P 、 Q ，求
(1) $\overline{PQ}$ 的中點坐標為____________．　(2) $\overline{PQ}=$____________．
5. 設 $P(2,4)$ 為橢圓 $2x^2+y^2-4x+2y-24=0$ 上一點，且 F 、 F' 為橢圓的兩焦點，則 $\angle FPF'$ 的角平分線為____________．
6. 圓錐曲線 $\Gamma: 2x^2-3y^2-4x-4=0$ 焦點為 F_1 、 F_2 ，若 $P(4,2)$ 在圓錐曲線上，求 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線方程式為____________．

二、計算題　(1 小題 每小題 16 分 共 16 分)

1. 試就 k 值討論 $y=2x+k$ 和雙曲線 $4x^2-9y^2=36$ 的相交狀況．

答　案

一、填充題　(7 格　每格 12 分　共 84 分)

1. $2x-y-3=0$　2. $\left(-\frac{7}{4},-1\right)$　3. $\frac{6}{5}$　4. (1) $(2,-1)$;(2) $\frac{2\sqrt{30}}{3}$　5. $5x-2y-2=0$

6. $x-y-2=0$

二、計算題　(1 小題　每小題 16 分　共 16 分)

1. 見解析

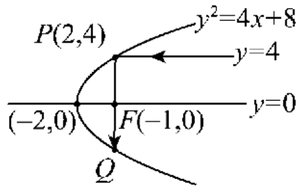
解　析

一、填充題　(7 格　每格 12 分　共 84 分)

1. $(1,-1)$代入Γ中成立，表示$A(1,-1)$在Γ上，

代切點公式得切線為$2x-3y+4\times\frac{y-1}{2}-1=0\Rightarrow 2x-y-3=0$.

2. 原式$\Rightarrow y^2=4(x+2)$，$\therefore$頂點$(-2,0)\Rightarrow c=1$，焦點$F(-1,0)$，



$y=4$代入$y^2=4x+8\Rightarrow 4^2=4x+8\Rightarrow x=2$，$\therefore P(2,4)$，

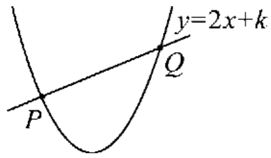
$m_{\overline{PF}}=\frac{4}{3}$，$\overleftrightarrow{PF}:4x-3y=-4\Rightarrow 4x=3y-4$，

代入$y^2=4x+8\Rightarrow y^2=(3y-4)+8$

$\Rightarrow y^2-3y-4=0\Rightarrow(y-4)(y+1)=0\Rightarrow y=4$或$-1$，

$\therefore Q$點坐標為$\left(-\frac{7}{4},-1\right)$.

3. $\begin{cases}y=x^2-5x+13\\y=2x+k\end{cases}$



$\Rightarrow x^2-5x+13=2x+k\Rightarrow x^2-7x+(13-k)=0$，

兩根x_1、$x_2\Rightarrow x_1+x_2=7$，$x_1x_2=13-k$，

設$P(x_1,2x_1+k)$，$Q(x_2,2x_2+k)$

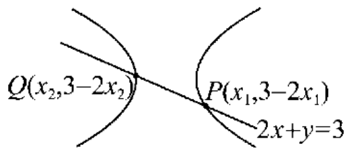
$\therefore\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left[2(x_1-x_2)\right]^2}=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{5\left[7^2-4(13-k)\right]}=3$，

兩邊平方$\Rightarrow 5(49-52+4k)=9\Rightarrow 20k=9+15=24$，$\therefore k=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$.

4. (1) $\begin{cases}2x+y=3\cdots\cdots①\\x^2-y^2=1\cdots\cdots②\end{cases}$ 由①$\Rightarrow y=3-2x$代入②$\Rightarrow 3x^2-12x+10=0$兩根為$x_1$、$x_2$，

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1\cdot x_2=\frac{10}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{2}=2$，$\therefore\overline{PQ}$中點$(2,-1)$.



(2) $\overline{PQ}=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(2x_1-2x_2\right)^2}=\sqrt{5\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{5\left(16-4\times\frac{10}{3}\right)}$

$=\sqrt{\frac{40}{3}}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$.

5. 所求即過 P 的法線，

先求切線 $2\times 2x+4\times y-4\times\frac{x+2}{2}+2\times\frac{y+4}{2}-24=0\Rightarrow 2x+5y-24=0$，

設法線爲 $5x-2y+k=0$，$(2,4)$ 代入得 $k=-2$，

$\therefore$ 法線： $5x-2y-2=0$.

6. 由圓錐曲線的光學性質可知，$\angle F_1PF_2$ 的角平分線即過 $P(4,2)$ 的切線，

代切點公式 $\Rightarrow 2\times 4\times x-3\times 2\times y-4\times\frac{1}{2}(4+x)-4=0\Rightarrow x-y-2=0$.

二、計算題 (1 小題 每小題 16 分 共 16 分)

1. $y=2x+k$ 代入雙曲線方程式 $\Rightarrow 4x^2-9(2x+k)^2=36$

$\Rightarrow 4x^2-9\left(4x^2+4kx+k^2\right)=36\Rightarrow 32x^2+36kx+9k^2+36=0$，

①相交兩點 $\Rightarrow D>0$

$\Rightarrow (36k)^2-4\times 32\left(9k^2+36\right)>0\Rightarrow 36k^2-32\left(k^2+4\right)>0$

$\Rightarrow 9k^2-8k^2-32>0\Rightarrow k^2>32$，

$\therefore k>4\sqrt{2}$ 或 $k<-4\sqrt{2}$.

②相切 $\Rightarrow D=0$，$\therefore k=\pm 4\sqrt{2}$.

③不相交 $\Rightarrow D<0$，$\therefore -4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2}$.