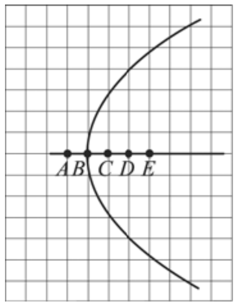
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.03.02					
範圍	1-2 拋物線	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

( ) 1.下圖為一拋物線的部分圖形，且 A， B， C， D， E 5 個點中有一為其焦點．試判斷哪一點是其焦點．

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E．



解答 4

解析 焦點應在拋物線內部，故可能的選擇為 C， D， E．

因為正焦弦長為焦距的 4 倍，所以由圖知，D 點滿足此性質，故 D 點為拋物線的焦點．

( ) 2.設拋物線的對稱軸平行於 y 軸且通過 $(1,0)$、$(0,-5)$、$(2,11)$ 三點，則方程式為

(1) $y=4x^2+x-5$ (2) $y=6x^2-x-5$ (3) $y=x^2+4x-5$ (4) $y=3x^2+2x-5$．

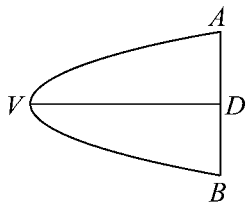
解答 4

解析 設拋物線方程式為 $y=ax^2+bx+c$，過 $(1,0)$，$(0,-5)$，$(2,11)$，

$$\therefore \begin{cases} 0=a+b+c\cdots\cdots① \\ -5=c\cdots\cdots② \\ 11=4a+2b+c\cdots\cdots③ \end{cases}$$

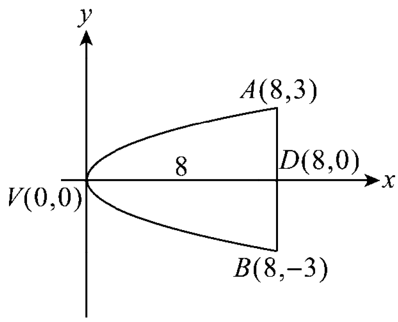
解①②③得 $c=-5$， $a=3$， $b=2$，$\therefore$ 方程式為 $y=3x^2+2x-5$．

( ) 3.下圖是一拋物線被截出一部分的圖形，其中 V 為頂點，直線 VD 為對稱軸，A、B 兩點在拋物線上且對稱於直線 VD．若 $VD=8$，$AB=6$，則此拋物線的焦距為(1) $\frac{9}{32}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{9}{8}$ (4) $\frac{8}{3}$．



解答 1

解析 $\because$ 拋物線開口向右，$\therefore$ 設方程式為 $y^2=4cx$，$c>0$，建立坐標系，如圖，過 $A(8,3)\Rightarrow 9=4c\times 8\Rightarrow c=\frac{9}{32}$．



二、多選題 (每題 10 分)

( ) 4.在坐標平面上，設拋物線 Γ 通過點 $(8,4)$，且其對稱軸為直線 $x-2=0$．試問下列哪些選項是正確的?

(1)若拋物線 Γ 的頂點坐標為 $(2,1)$，則其焦點坐標必為 $(2,4)$

(2)若拋物線 Γ 的焦點坐標為 $(2,12)$，則其頂點坐標必為 $(2,3)$

(3)若拋物線 Γ 也通過點 $(10,11)$，則其準線方程式必為 $y+6=0$

(4)直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的頂點

(5)直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的焦點．

解答 135

解析 依題意可設Γ的方程式爲$(x-2)^2=4c(y-k)$

將點$(8,4)$代入可得$36=4c(4-k)\Rightarrow 9=c(4-k)$

(1)令$k=1$，則$9=3c$，$c=3$，故焦點坐標爲$(2,4)$

(2)$c=12-k$，則$9=(12-k)(4-k)\Rightarrow k^2-16k+39=0\Rightarrow (k-3)(k-13)=0\Rightarrow k=3$或$13$

故頂點坐標爲$(2,3)$或$(2,13)$

(3)將$(10,11)$代入$(x-2)^2=4c(y-k)$可得$64=4c(11-k)\Rightarrow 16=c(11-k)$與$9=c(4-k)$

聯立解得$k=-5$，$c=1$　$\therefore$頂點坐標爲$(2,-5)$，準線方程式爲$y=-6$

(4)當$k=4$時，方程式$9=c(4-k)$無c的解

故在直線$x-2=0$上，除了$(2,4)$以外，每個點都可能是拋物線Γ的頂點

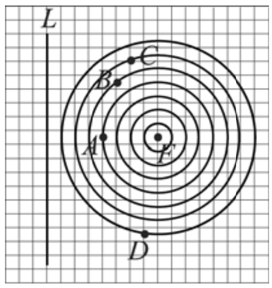
(5)令焦點坐標爲$(2,t)$，則$c=t-k$

$\Rightarrow 9=(t-k)(4-k)\Rightarrow k^2-(t+4)k+4t-9=0$

判別式$D=(t+4)^2-4(4t-9)=t^2-8t+52=(t-4)^2+36>0$

故k有二相異實根，表示拋物線Γ的方程式有二個解

$\therefore$直線$x-2=0$上每個點都可能是拋物線Γ的焦點．



(　　　)6.右圖中所有圓均是以F爲圓心的同心圓，問下列哪些點在以L爲準線，F爲焦點的拋物線上？　(1)A　(2)B　(3)C　(4)D．

解答 1234

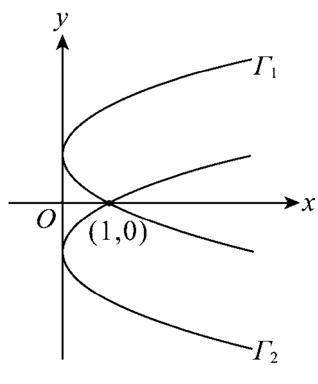
解析 觀察四點到焦點F與準線L的距離均相等，故此四點均在拋物線上．

(　　　)7.設a、b、c爲實數，若二次函數$x=ay^2+by+c$的圖形通過$(1,0)$且與y軸相切，下列何者爲真？　(1)$a<0$　(2)$b>0$　(3)$c=1$　(4)$b^2+4ac>0$　(5)$a+b+c\ge 0$．

解答 345

解析 $x=ay^2+by+c$，

如圖，可能爲Γ_1或Γ_2，



(1)╳：開口向右$\Rightarrow a>0$．

(2)╳：$y=-\dfrac{b}{2a}$可正，可負$\Rightarrow b$可正，可負．

(3)○：令$y=0\Rightarrow x=c=1$．

(4)○：$\because a>0$，$c>0\Rightarrow 4ac>0\Rightarrow b^2+4ac>0$．

(5)○：$y=1$代入$\Rightarrow x=a+b+c\ge 0$（由圖得知）．

(　　　)7.下列方程式何者表示一個完整的拋物線？

(1)$25(x^2+y^2)=(3x+4y-12)^2$　(2)$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

(3)$y-2=\sqrt{4(x+1)}$　(4)$y^2+5x-4y-1=0$　(5)$\sqrt{x^2+y^2}=|2x+y-5|$．

解答 14

解析 (1)○： $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{|3x+4y-12|}{5}$ ．

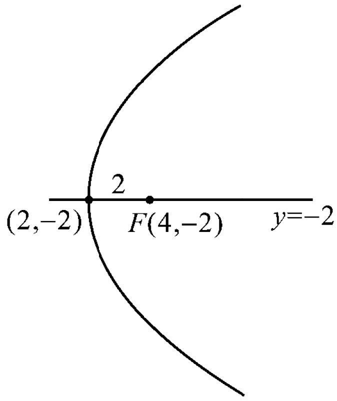
(2)╳： $F(-1,2)$ 在 $x+y-1=0$ 上．

(3)╳： $(y-2)^2=4(x+1)$，但 $x\ge -1$， $y\ge 2$，∴圖形不完整．

(4)○： $(y-2)^2=-5(x-1)$ ．

(5)╳．

(　　　)8.已知抛物線方程式爲 $y^2-8x+4y+20=0$，則
(1)對稱軸爲 $x=2$　(2)頂點 $(2,-2)$　(3)焦點 $(2,0)$
(4)正焦弦長爲 8　(5)開口向上．



解答 24

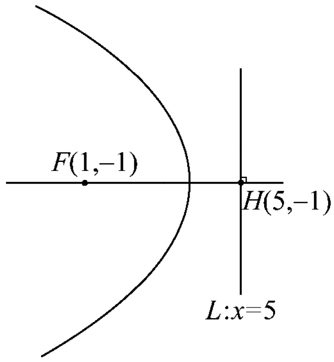
解析 原式 $\Rightarrow y^2+4y+4=8x-20+4=8x-16$

$\Rightarrow (y+2)^2=8(x-2)\Rightarrow$ 開口向右，

又頂點 $(2,-2)$， $8=4c\Rightarrow c=2$，
由圖得對稱軸： $y=-2$，焦點 $F(4,-2)$，正焦弦長爲 $4|c|=8$ ．

三、填充題　(每題 10 分)

1. 抛物線的準線方程式爲 $x-5=0$，焦點坐標爲 $(1,-1)$，則此抛物線的方程式爲____________．

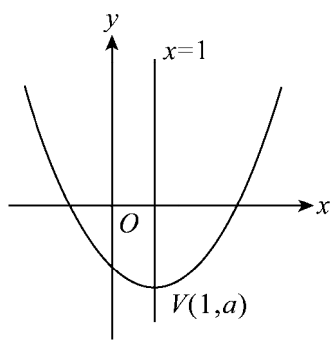


解答 $(y+1)^2=-8(x-3)$

解析 頂點 $(3,-1)$， $c=-2\Rightarrow$ 左右型，

∴抛物線方程式爲 $(y+1)^2=-8(x-3)$ ．

2. 設抛物線通過 $(3,0)$、$(5,6)$ 且其對稱軸爲 $x=1$，則其方程式爲____________．



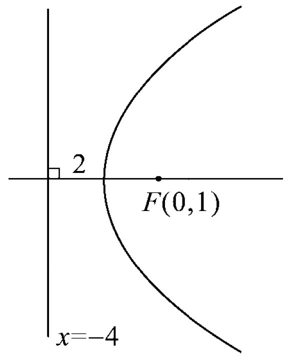
解答 $(x-1)^2=2(y+2)$

解析 設 $\Gamma:(x-1)^2=4c(y-a)$，

將點 $(3,0)$、$(5,6)$ 代入 $\Gamma\Rightarrow\begin{cases}4=4c(-a)\cdots\cdots①\\16=4c(6-a)\cdots\cdots②\end{cases}$

$\dfrac{②}{①}\Rightarrow 4=\dfrac{6-a}{-a}\Rightarrow a=-2$ 代回①，得 $4c=2$，故 $\Gamma:(x-1)^2=2(y+2)$ ．

3. 關於拋物線$(y-1)^2=8(x+2)$，試回答下列問題：



(1)頂點是____________ .　(2)焦點是____________ .

(3)正焦弦長是____________ .

(4)對稱軸是____________ .　(5)準線是____________ .

解答　(1)$(-2,1)$;(2)$(0,1)$;(3)8;(4) $y=1$;(5) $x=-4$

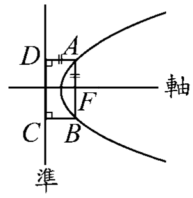
解析　如圖，則

(1)$(-2,1)$. (2)$\because c=2$且開口向右，$\therefore$焦點是$(0,1)$.

(3)8 .　(4) $y=1$.　(5) $x=-4$.

4. A、B爲拋物線$\Gamma: x-2y^2-4y+1=0$的正焦弦兩端點，分別過A、B向Γ的準線作垂線，垂足分別爲D、C，則矩形$ABCD$的面積爲____________ .

解答　$\frac{1}{8}$



解析　$\Gamma: x+1=2(y+1)^2-2 \Rightarrow (y+1)^2=\frac{1}{2}(x+3)$，

$\therefore$矩形$ABCD$面積爲$\overline{AB}\times\overline{AD}=4c\times 2c=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

5. 在坐標平面上，設直線$L: y=x+1$與拋物線$\Gamma: x^2=4y$相交於P、Q兩點 . 若F表拋物線Γ的焦點，則$\overline{PF}+\overline{QF}=$____________ .

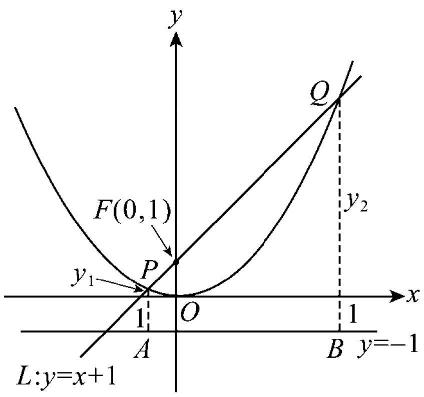
解答　8

解析　$x^2=4y \Rightarrow$頂點$(0,0)$，焦點$(0,1)$，

$y=x+1 \Rightarrow x=y-1$代入$x^2=4y \Rightarrow (y-1)^2=4y \Rightarrow y^2-6y+1=0$，

設二根y_1、y_2，則$y_1+y_2=6$，

$\therefore \overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PA}+\overline{QB}=(y_1+1)+(y_2+1)=(y_1+y_2)+2=6+2=8$.



6. 拋物線的準線垂直x軸且過三點$(1,0)$、$(-1,1)$、$(5,-1)$，則此拋物線的焦點坐標爲____________ .

解答　$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$

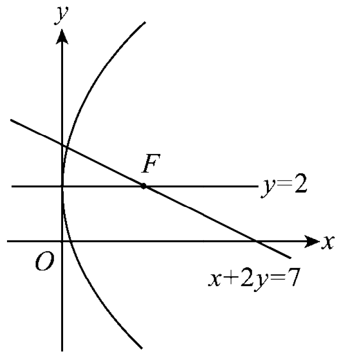
解析　∵左右型，∴令 $x=ay^2+by+c$，

點代入：$\begin{cases}1=c\\-1=a+b+c\\5=a-b+c\end{cases}\Rightarrow(a,b,c)=(1,-3,1)$，

$x=y^2-3y+1\Rightarrow\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=x-1+\frac{9}{4}=x+\frac{5}{4}$，　∵頂點$\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$，$c=\frac{1}{4}$，∴焦點$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$．

7. 一拋物線的頂點在 y 軸上，軸爲 $y=2$，而焦點在 $x+2y=7$ 上，則此拋物線的方程式爲________．

解答　$(y-2)^2=12x$



解析　$F:\begin{cases}x+2y=7\\y=2\end{cases}\Rightarrow F(3,2)$，又頂點 $(0,2)$，

$\therefore c=3\Rightarrow$ 方程式爲 $(y-2)^2=12x$．

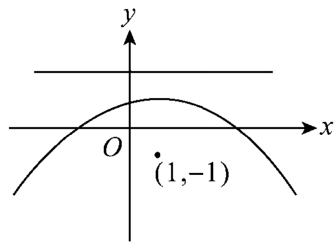
8. 焦點爲 $(1,-1)$，準線垂直於 y 軸，正焦弦長爲 8 的拋物線方程式爲_____.

解答　$(x-1)^2=-8(y-1)$ 或 $(x-1)^2=8(y+3)$

解析　$\because |4c|=8\Rightarrow c=\pm2$，

① $c=-2$，頂點 $(1,1)$，

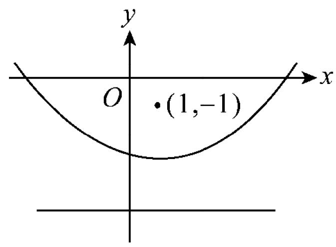
$\therefore$ 方程式爲 $(x-1)^2=-8(y-1)$．（如圖一）



〈圖一〉

② $c=2$，頂點 $(1,-3)$，

$\therefore$ 方程式爲 $(x-1)^2=8(y+3)$．（如圖二）



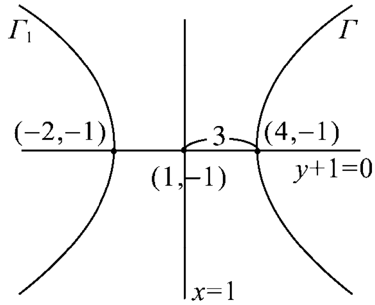
〈圖二〉

由①②可知，

拋物線方程式爲 $(x-1)^2=-8(y-1)$ 或 $(x-1)^2=8(y+3)$．

9. 有一拋物線 Γ 的對稱軸爲 $y+1=0$ 且準線爲 $x=1$；若 Γ 的正焦弦長是 12，則 Γ 的方程式爲_____.

解答　$(y+1)^2=12(x-4)$，$(y+1)^2=-12(x+2)$



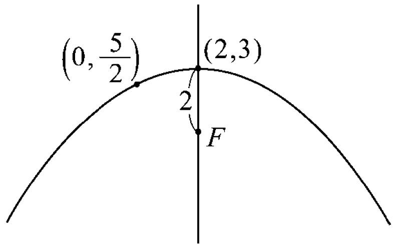
解析　$4|c|=12\Rightarrow c=\pm3$，

$\therefore \Gamma:(y+1)^2=12(x-4)$，$\Gamma_1:(y+1)^2=-12(x+2)$．

10.拋物線 Γ 的頂點爲 $(2,3)$ 且過點$\left(0,\frac{5}{2}\right)$，其對稱軸平行 y 軸，則

(1)拋物線方程式____________．　(2)焦點坐標____________．

解答　(1) $(x-2)^2=-8(y-3)$；(2) $(2,1)$

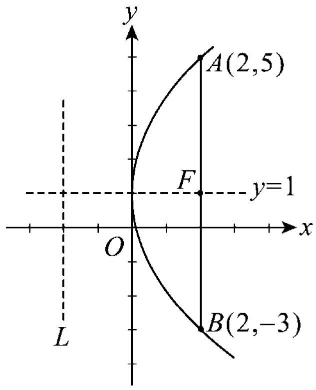


解析　(1)設拋物線$(x-2)^2=4c(y-3)$過$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow(-2)^2=4c\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow c=-2$，所求為$(x-2)^2=-8(y-3)$．

(2)焦點$F(2,3-2)=(2,1)$．

11.拋物線的正焦弦兩端點為$A(2,5)$，$B(2,-3)$且拋物線的開口向右，則此拋物線方程式為______．



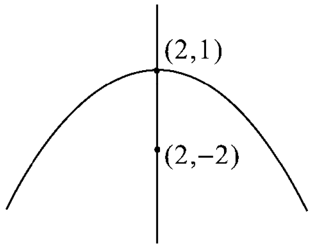
解答　$(y-1)^2=8x$

解析　$\overline{AB}=8=4c$，$\therefore c=2$，焦點$F(2,1)$，

對稱軸$y=\dfrac{1}{2}(5+(-3))=1\Rightarrow$頂點$(0,1)$，

$\therefore$拋物線方程式為$(y-1)^2=8x$．

12.頂點$(2,1)$，焦點$(2,-2)$的拋物線方程式為$(x-h)^2=4c(y-k)$，則$h+k+c=$____________．



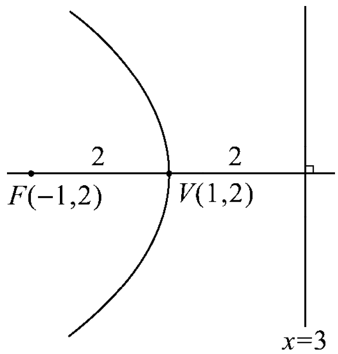
解答　0

解析　頂點$(2,1)$，$c=-3$，開口向下，

$\therefore$拋物線方程式為$(x-2)^2=-12(y-1)$，

$\therefore h+k+c=2+1-3=0$．

13.已知拋物線頂點$(1,2)$，焦點$(-1,2)$，則準線方程式為____________．



解答　$x=3$

解析　如圖，準線方程式為$x=3$．

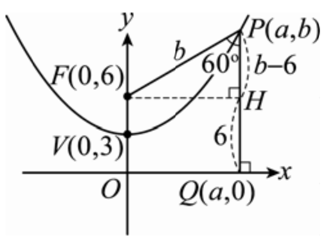
14.設一拋物線的對稱軸平行於x軸且過$(1,1)$、$(3,2)$、$(3,-1)$三點，則拋物線方程式為____________．

解答　$x=y^2-y+1$

解析　設$x=ay^2+by+c$，過$(1,1)$、$(3,2)$、$(3,-1)$，

$$\therefore\begin{cases}1=a+b+c\\3=4a+2b+c\\3=a-b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}\quad\therefore\text{拋物線方程式為}\ x=y^2-y+1\ .$$

15.坐標平面上有一以點$V(0,3)$為頂點、$F(0,6)$為焦點的拋物線．設$P(a,b)$為此拋物線上一點，$Q(a,0)$為P在x軸上的投影，滿足$\angle FPQ=60°$，則$b=$____________．



解答　12

解析　如圖x軸為準線　$\therefore\overline{PF}=\overline{PQ}=b$

$\triangle PFH$中，$\overline{PF}=2\overline{PH}\Rightarrow b=2(b-6)\Rightarrow b=12$.

16.設 $A(1,0)$ 與 $B(b,0)$ 爲坐標平面上的兩點，其中 $b>1$. 若拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 上有一點 P 使得$\triangle ABP$ 爲一正三角形，則 $b=$____________ .

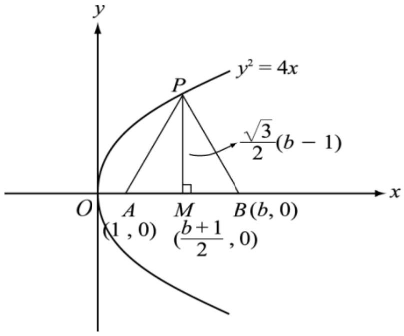
解答　5

解析　如圖，在第一、四象限上各有一點 P，

可使$\triangle ABP$ 爲正三角形且兩點互相對稱於 x 軸，

又因$\triangle ABP$ 是邊長爲 $b-1$ 的正三角形，

所以 P 點的坐標爲 $\left(\dfrac{b+1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}(b-1)}{2}\right)$，



由於 P 點在 $\Gamma: y^2=4x$ 上，

代入得 $\dfrac{3}{4}(b-1)^2=4\left(\dfrac{b+1}{2}\right)$，

展開化簡得 $3b^2-14b-5=0$，因此 $b=-\dfrac{1}{3}$ 或 5，然而 $b>1$，所以 $b=5$.

17.與直線 $L: x+12=0$ 相切且與圓 $C: x^2+y^2=16$ 相切的圓其圓心軌跡方程式爲____________ .

解答　$y^2=32(x+8)$ 或 $y^2=16(x+4)$

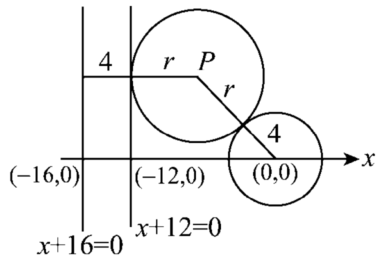
解析　設圓心爲 P，半徑爲 r，

①與圓 C 外切，

由圖知：即以 $(0,0)$ 爲焦點，$x+16=0$ 爲準線的拋物線

$\Rightarrow$ 頂點 $(-8,0)$，$c=8$，開口向右，

$\therefore$ 方程式爲 $y^2=32(x+8)$.

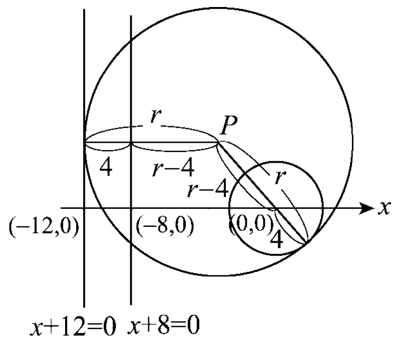


②與圓 C 內切，　由圖知：即以 $(0,0)$ 爲焦點，

$x+8=0$ 爲準線的拋物線

$\Rightarrow$ 頂點 $(-4,0)$，$c=4$，開口向右，

$\therefore$ 方程式爲 $y^2=16(x+4)$.



由①②可知，方程式爲 $y^2=32(x+8)$ 或 $y^2=16(x+4)$.

18.在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 $y^2=4x$ 於 P、Q 兩點，

P 在上半平面且 $\overline{PF}=2\overline{QF}$，則 P 的 x 坐標爲____________ .

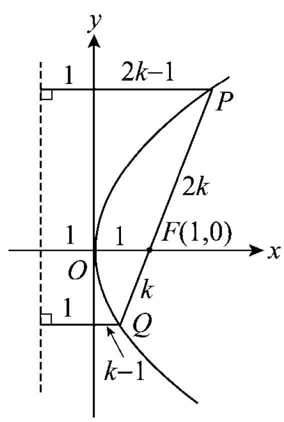
解答　2

解析　$\because \overline{PF}=2\overline{QF}$，$\therefore$ 設 $\overline{PF}=2k$，$\overline{QF}=k$，

$\therefore P(2k-1,y_1)$，$Q(k-1,y_2)$，

由分點公式：$1=\dfrac{2(k-1)+(2k-1)}{3}\Rightarrow 3=4k-3$，$k=\dfrac{3}{2}$，

故所求爲 $2k-1=3-1=2$.



19.設 $A(-1,0)$， $B(0,2)$， P 是抛物線 $y^2=4x$ 上的動點，則△ ABP 面積的最小值爲____________.

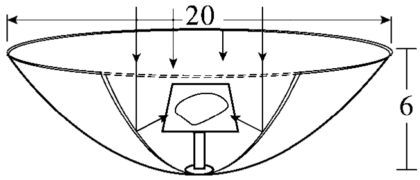
解答 $\frac{3}{4}$

解析 設 $P(t^2,2t)$， $\overrightarrow{AB}=(1,2)$， $\overrightarrow{AP}=(t^2+1,2t)$，

$$\therefore \triangle ABP=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ t^2+1 & 2t\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|2t-2t^2-2\right|=\left|t^2-t+1\right|=\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|,$$

當 $t=\frac{1}{2}$ 時，△ ABP 面積有最小值爲 $\frac{3}{4}$.

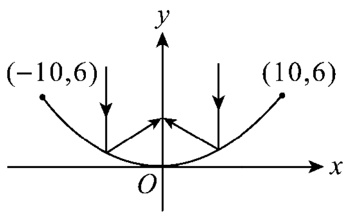
20.如圖，有一太陽灶，它是由抛物線繞軸旋轉而做成的抛物面，開口直徑 20 公寸，開口距底部之深爲 6 公寸．試問烤肉盤應置於距離底部____________公寸，才能將肉烤熟．



解答 $\frac{25}{6}$

解析 $y=ax^2 \Rightarrow 6=a\times 10^2 \Rightarrow a=\frac{3}{50}$， $\therefore x^2=\frac{50}{3}y$，

$4c=\frac{50}{3} \Rightarrow c=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$.



21.過 $A(3,2)$ 且與 $(x+1)^2=12(y-2)$ 共焦點，共對稱軸的抛物線方程式爲____________.

解答 $(x+1)^2=16(y-1)$ 或 $(x+1)^2=-4(y-6)$

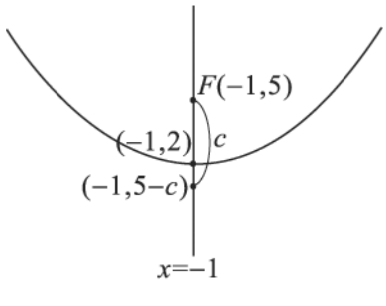
解析 原抛物線頂點 $(-1,2)$，又 $4c=12 \Rightarrow c=3 \Rightarrow F(-1,5)$，

由圖知新頂點爲 $(-1,5-c)$，故設新抛物線方程式爲 $(x+1)^2=4c(y-(5-c))$，

過 $A(3,2) \Rightarrow 16=4c(2-(5-c))$

$\Rightarrow 4=c(c-3) \Rightarrow c^2-3c-4=0$

$\Rightarrow (c-4)(c+1)=0 \Rightarrow c=4$ 或 -1，



① $c=4$，開口向上，新頂點 $(-1,1)$ $\Rightarrow (x+1)^2=16(y-1)$.

② $c=-1$，開口向下，新頂點 $(-1,6)$ $\Rightarrow (x+1)^2=-4(y-6)$.

由①②得所求爲 $(x+1)^2=16(y-1)$ 或 $(x+1)^2=-4(y-6)$.