高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：99.01.05					
範圍	3-3 球面方程式	班級		姓名	
		座號			

一、多選題　(每題 10 分)

(　　　) 1.若球面 S 的球心為 $(1,-1,1)$ 且通過點 $(2,1,-1)$，則下列哪些點在球面 S 上?

(1) $(0,1,2)$　(2) $(-1,1,0)$　(3) $(3,1,0)$　(4) $(2,0,3)$　(5) $(-1,1,2)$.

解答　235

解析　球面 S 的半徑為 $\sqrt{(1-2)^2+(-1-1)^2+(1-(-1))^2}=3$.

(1) $(0,1,2)$ 與球心的距離為 $\sqrt{(1-0)^2+(-1-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}\neq 3$.

(2) $(-1,1,0)$ 與球心的距離為 $\sqrt{(1-(-1))^2+(-1-1)^2+(1-0)^2}=3$.

(3) $(3,1,0)$ 與球心的距離為 $\sqrt{(1-3)^2+(-1-1)^2+(1-0)^2}=3$.

(4) $(2,0,3)$ 與球心的距離為 $\sqrt{(1-2)^2+(-1-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}\neq 3$.

(5) $(-1,1,2)$ 與球心的距離為 $\sqrt{(1-(-1))^2+(-1-1)^2+(1-2)^2}=3$.

二、填充題　(每題 10 分)

1. 試求通過 $(2,1,0)$，$(0,-3,4)$，$(-1,0,0)$，$(-1,-2,4)$ 四點

(1)求球面方程式____________________，並求(2)其球心____________和半徑__________ .

解答　(1) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$，(2)球心為 $(1,-1,2)$，半徑為 3

解析　設所求的球面方程式為 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，

將 $(2,1,0)$，$(0,-3,4)$，$(-1,0,0)$ 與 $(-1,-2,4)$ 代入，得 $\begin{cases}2d+e+g+5=0,\\-3e+4f+g+25=0,\\-d+g+1=0,\\-d-2e+4f+g+21=0.\end{cases}$

將第二、三、四式分別減去第一式得 $\begin{cases}-2d-4e+4f+20=0,\\-3d-e-4=0,\\-3d-3e+4f+16=0,\end{cases}$

解得 $d=-2$，$e=2$，$f=-4$，$g=-3$.

所求的球面方程式為 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$.

依 x，y，z 分別配方，得 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$，故球心為 $(1,-1,2)$，半徑為 3 .

2. 設球面方程式爲$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1$，則

(1)原點到球面最大距離爲____________；(2)此時球面上的該點坐標爲____________ .

解答 (1)4;　(2)$\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},-\frac{8}{3}\right)$

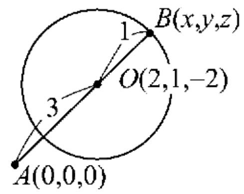
解析 (1) $A(0,0,0)$代入球面方程式

$\Rightarrow 2^2+1^2+2^2-1>0$

$\therefore A(0,0,0)$在球面外

又球心$O(2,1,-2)$，半徑$r=1$

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$



故最大距離：$\overline{OA}+r=3+1=4$

(2)如圖所示爲B點

$\because \overline{OA}=3$，$\overline{OB}=r=1$

設$B(x,y,z)$　$\therefore \begin{cases}\frac{3x}{4}=2\\ \frac{3y}{4}=1\\ \frac{3z}{4}=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{8}{3}\\ y=\frac{4}{3}\\ z=-\frac{8}{3}\end{cases}$　故$\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},-\frac{8}{3}\right)$爲所求

3. 球面經過$P(4,0,8)$、$Q(-2,-4,-4)$,球心在直線$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$上,則球心的坐標爲____________.

解答 $(1,-2,2)$

解析 設球心O爲$(t,-t-1,t+1)$

$\because \overline{OP}^2=\overline{OQ}^2 \Rightarrow (t-4)^2+(-t-1)^2+(t-7)^2=(t+2)^2+(-t+3)^2+(t+5)^2$

$\therefore t=1$　$\Rightarrow$球心爲$(1,-2,2)$

4. 求滿足下述條件之球面的方程式:

(1)球心在點$A(1,-2,3)$，半徑爲 6: ____________;

(2)通過點$P(1,-1,3)$，球心在點$A(1,-4,-3)$: ____________ .

解答 (1)$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=36$;(2)$(x-1)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=45$

解析 (1)球面方程式爲$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=36$

(2) $\overline{AP}=\sqrt{(1-1)^2+(-1+4)^2+(3+3)^2}=\sqrt{45}$

$\because$球心爲$A(1,-4,-3)$　半徑$r=\overline{AP}=\sqrt{45}$　$\therefore$球面方程式爲

$(x-1)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=45$

5. 求以$P_1(3,1,4)$、$P_2(3,-5,2)$連成之線段$\overline{P_1P_2}$爲直徑之球方程式爲____________。

解答 $x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+12=0$

解析 利用直徑式$\Rightarrow S:(x-3)(x-3)+(y-1)(y+5)+(z-4)(z-2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+12=0$

6. 球面S通過$A(2,4,-1)$及$B(1,0,2)$兩點，且球心在直線$L:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$上，求球面$S$的方程式：__________。

解答 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

解析 因球心在直線$L:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$上

故設球心的坐標爲$Q(5+t,-4-3t,3+t)$

因球心Q與A、B爲等距離（同爲半徑）

故$[(5+t)-2]^2+[(-4-3t)-4]^2+[(3+t)+1]^2=[(5+t)-1]^2+(-4-3t)^2+[(3+t)-2]^2$

$\Rightarrow t=-2$

$\therefore$球心爲$(3,2,1)$　　球半徑爲$\overline{AQ}=\sqrt{(3-2)^2+(2-4)^2+(1+1)^2}=3$

$\therefore$球面方程式爲$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

7. 在空間中，球面$S:x^2+y^2+z^2+2x-4z+3=0$及點$P(1,2,-1)$，求：

(1)點P到球面S的切線段長爲____________；

(2)過P之任一直線L與球面S相交於A、B二點，則$\overline{PA}\times\overline{PB}=$____________。

解答 (1) $\sqrt{15}$;(2)15

解析 (1)切線段長$\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+2\times1-4\times(-1)+3}=\sqrt{15}$

(2) $\overline{PA}\times\overline{PB}=(\text{切線段長})^2=15$

8. 已知直線$L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$與球面$S:(x+2)^2+y^2+z^2=4$交於相異兩點$A$、$B$，則$\overline{AB}$的長爲____________。

解答 2

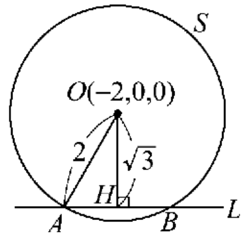
解析 設$H(t,2t+1,t+2)$

$\because$ 圓心 $O(-2,0,0)$

$\overline{OH}=\sqrt{(t+2)^2+(2t+1)^2+(t+2)^2}$

$=\sqrt{6t^2+12t+9}=\sqrt{6(t+1)^2+3}\ge\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{4-3}=2$



9.設方程式 $x^2+y^2+z^2+4ax-2ay-2z-\left(a^2-13a+4\right)=0$ 的圖形爲一球面，求 a 之範圍爲________ .

解答　$a>\dfrac{5}{3}$ 或 $a<\dfrac{1}{2}$

解析　$(x+2a)^2+(y-a)^2+(z-1)^2=4a^2+a^2+1+\left(a^2-13a+4\right)=6a^2-13a+5$

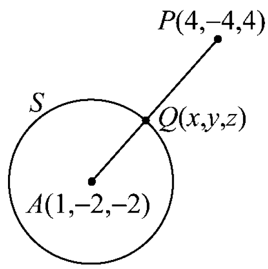
$=(3a-5)(2a-1)>0$

$\therefore\ a>\dfrac{5}{3}$ 或 $a<\dfrac{1}{2}$

10.設 x 、 y 、 z 爲實數，且滿足 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$ ，求：

(1) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$ 的最小值，又產生最小值時，序組 $(x,y,z)=$____________；

(2) $2x-3y+4z$ 的最小值爲____________ .



解答　(1) $\left(\dfrac{16}{7},-\dfrac{20}{7},\dfrac{4}{7}\right)$;(2) $-3\sqrt{29}$

解析　(1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$　球心爲 $A(1,-2,-2)$ ，半徑爲 3

令 $P(4,-4,4)$　$\overline{AP}=\sqrt{(4-1)^2+(-4+2)^2+(4+2)^2}=7>3$　$\therefore$ P 在球面 S 的外部

求 $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$ 之最小值，即求球面 S 上的點 (x,y,z) 與點 $P(4,-4,4)$ 之距離的平方的最小值，

連接線段 $\overline{AP}$ ，與球面 S 相交於點 Q ，　則球面上離 P 點最近的點爲 Q

而 $\overline{PQ}=7-3=4$　$\therefore\ (x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$ 的最小值爲 16

又設 Q 之坐標爲 (x,y,z)　則因 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AP}$

故 $(x-1,y+2,z+2)=\dfrac{3}{7}(3,-2,6)$　$\therefore\ x=\dfrac{16}{7}$ ，$y=-\dfrac{20}{7}$ ，$z=\dfrac{4}{7}$

所求序組 $(x,y,z)=\left(\dfrac{16}{7},-\dfrac{20}{7},\dfrac{4}{7}\right)$

(2) $\because\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$

由柯西不等式

$$\left[(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2\right]\left[2^2+(-3)^2+4^2\right]\ge\left[2(x-1)-3(y+2)+4(z+2)\right]^2$$

$\Rightarrow 9\times 29\ge(2x-3y+4z)^2$

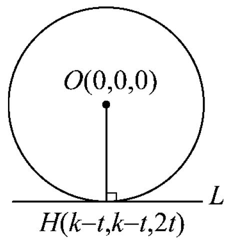
$\Rightarrow -3\sqrt{29}\le 2x-3y+4z\le 3\sqrt{29}$

$\therefore 2x-3y+4z$ 之最小值爲 $-3\sqrt{29}$

11.球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 與直線 $L:-\dfrac{x-k}{1}=-\dfrac{y-k}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相切，則 $k=$____________．

解答　$\pm 2\sqrt{3}$

解析　設切點 $H(k-t,k-t,2t)$， $O(0,0,0)$



$\overrightarrow{OH}=(k-t,k-t,2t)$

L 之方向向量 $\overrightarrow{d}=(-1,-1,2)$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{d}=0\Rightarrow -k+t-k+t+4t=0$

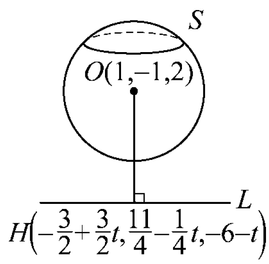
$\Rightarrow k=3t$

$H(2t,2t,2t)$ 代入　$4t^2+4t^2+4t^2=16\Rightarrow t=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　$\therefore k=\pm 2\sqrt{3}$

12.試求直線 $L:\dfrac{2x+3}{3}=-\dfrac{4y-11}{1}=-\dfrac{z+6}{1}$ 與球面 $S:x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ 的最短距離爲____________．

解答　6

解析　$L:\dfrac{x+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{y-\frac{11}{4}}{-\frac{1}{4}}=\dfrac{z+6}{-1}$



令 $H\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}t,\dfrac{11}{4}-\dfrac{1}{4}t,-6-t\right)$

$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

球心 $O(1,-1,2)$， $r=3$

$\overrightarrow{OH}=\left(-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}t,\dfrac{15}{4}-\dfrac{1}{4}t,-8-t\right)$

取直線 L 之方向向量 $\overrightarrow{d}=(6,-1,-4)$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{d}=0\Rightarrow -15+9t-\frac{15}{4}+\frac{1}{4}t+32+4t=0\Rightarrow \frac{53}{4}t=-\frac{53}{4}\Rightarrow t=-1$

$\overrightarrow{OH}=(-4,4,-7)$　　∴最短距離$=\sqrt{16+16+49}-3=9-3=6$

13.直線$L:x-1=-(y+1)=z-2$與球面$S:x^2+y^2+z^2=r^2$($r>0$)相切，求：

(1)$r=$__________；(2)切點的坐標爲__________．

解答　(1)$\frac{\sqrt{6}}{3}$;(2)$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

解析　$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}=t$　　令$x=1+t$，$y=-1-t$，$z=2+t$

切點坐標爲$H(1+t,-1-t,2+t)$

$\overrightarrow{OH}=(1+t,-1-t,2+t)$，$L$之方向向量爲$\overrightarrow{d}=(1,-1,1)$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{d}=0\Rightarrow 1+t+1+t+2+t=0\Rightarrow t=-\frac{4}{3}$

$\therefore H\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，$r=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

14.設有一球面過兩點$(0,2,2)$、$(4,0,0)$，而球心在y軸上，則此球面方程式爲__________．

解答　$x^2+(y+2)^2+z^2=20$

解析　∵球心在y軸上 設球心的坐標爲$(0,t,0)$

因球面通過$(0,2,2)$與$(4,0,0)$故半徑$=\sqrt{0^2+(t-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(0-4)^2+(t-0)^2+0^2}$

$\Rightarrow t^2-4t+4+4=16+t^2$　　$\therefore t=-2$

∴球心$(0,-2,0)$，半徑爲$\sqrt{20}$　　故球面方程式爲$x^2+(y+2)^2+z^2=20$

15.設三元二次方程式$x^2+y^2+z^2-2mx+4my-2z+6m^2-3m+3=0$的圖形是一個球面，求

(1)實數m的範圍爲__________；

(2)當$m=$__________時，此球面的半徑爲最大，又最大半徑爲__________．

解答　(1)$1<m<2$;(2)$\frac{3}{2},\frac{1}{2}$

解析　(1)配方

$$(x-m)^2+(y+2m)^2+(z-1)^2=m^2+4m^2+1-(6m^2-3m+3)$$

$$=-m^2+3m-2=-(m-1)(m-2)$$

因其圖形是一個球面，故$-(m-1)(m-2)>0$　$\Rightarrow (m-1)(m-2)<0$　　$\therefore 1<m<2$

(2)球之半徑$r=\sqrt{-(m^2-3m+2)}=\sqrt{-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$

當 $m=\dfrac{3}{2}$ 時，半徑 r 有最大值為 $\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

16.已知直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$ 與球面 $S:x^2+y^2+z^2=9$ 相交於兩點，求此兩交點坐標．

解答 $(2,-1,2)$ 和 $(3,0,0)$

解析 設 L 與球面的交點為 $(1+t,-2+t,4-2t)$，代入球面 $(1+t)^2+(-2+t)^2+(4-2t)^2=9$，

化簡 $6t^2-18t+12=0$，即 $t^2-3t+2=0$，解得 $t=1$ 或 2．　故兩交點為 $(2,-1,2)$ 和 $(3,0,0)$．

17.設 k 是任意實數，試依 k 值討論方程式 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2kz+k+7=0$ 的圖形．

解答 $k>2$ 或 $k<-1$ 時，圖形為一球面，$k=2$ 或 -1 時，圖形為一點，$-1<k<2$ 時，方程式沒有圖形

解析 利用配方法，得 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-k)^2=k^2-k-2$，

因為 $k^2-k-2=(k-2)(k+1)$，所以

(1)當 $(k-2)(k+1)>0$，即 $k>2$ 或 $k<-1$ 時，圖形為一球面．

(2)當 $(k-2)(k+1)=0$，即 $k=2$ 或 -1 時，圖形為一點．

(3)當 $(k-2)(k+1)<0$，即 $-1<k<2$ 時，方程式沒有圖形．

18.球面 $S:x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z-2=0$ 上的點到 $P(1,1,-3)$ 的最遠距離為 m，最近距離為 n，

求 (m,n)．

解答 $(7,1)$

解析 配方 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$，球心 $(3,2,-1)$，半徑 4．

又 P 到球心的距離 $\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2+(-3-(-1))^2}=3<4$，

故 P 在球面 S 的內部，所以 P 到球面的最近距離為 $|4-3|=1$，

最遠距離為 $2\times4-1=7$，因此 $(m,n)=(7,1)$．

19.設兩球面 $S_1:(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$，$S_2:(x-4)^2+(y+2)^2+z^2=1$．

(1)判別 S_2 的球心 $M_2(4,-2,0)$ 在球面 S_1 的內部、外部或球面上．＿＿＿＿＿

(2)兩球面 S_1 與 S_2 是否相交? ＿＿＿＿

解答 (1)內部;(2)是

解析 (1)球面 S_1 的球心 $M_1(2,0,-1)$，半徑為 4;

球面S_2的球心$M_2\left(4,-2,0\right)$，半徑爲 1．

M_2與M_1的距離$\overline{M_1M_2}=\sqrt{\left(2-4\right)^2+\left(0-\left(-2\right)\right)^2+\left(-1-0\right)^2}=\sqrt{9}=3<4$，

故點M_2在球面S_1的內部．

(2)兩球心的距離$\overline{M_1M_2}=3$，兩球半徑的和$=4+1=5$，兩球半徑的差$=\left|4-1\right|=3$．

兩球半徑的差＝兩球心的距離．故球面S_1與S_2相交於一點．