<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：98.12.29</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-2 圓與直線</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、單選題 （ 每題 5 分 ）

(　　　) 1. 在坐標平面上，選出與圓 $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ 相切的直線：

(1) $3x+4y=5$　(2) $3x+4y=0$　(3) $4x+3y=5$　(4) $4x+3y=0$　(5) $4x+3y=1$.

解答 2

解析 利用圓心到切線之距離等於半徑，圓心 $(3,4)$，半徑 $=5$.

(1)╳： $d - \left|\dfrac{9+16-5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\dfrac{20}{5}=4<5$，相割(交於兩點) .

(2)○： $d=\left|\dfrac{9+16}{5}\right|=5$，相切 .

(3)╳： $d=\left|\dfrac{12+12-5}{5}\right|=\dfrac{19}{5}<5$，相割 .

(4)╳： $d=\left|\dfrac{12+12}{5}\right|=\dfrac{24}{5}<5$，相割 .

(5)╳： $d=\left|\dfrac{12+12-1}{5}\right|=\dfrac{23}{5}<5$，相割 .

(　　　) 2. 設直線 $x+my-m=0$ 與圓 $x^2+y^2-x=0$ 相交於 A 、 B 兩點，若 $\overline{AB}=1$，試求 m 之值爲(1) $\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(4) -2　(5) 2 .

解答 2

解析 原式 $\Rightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，圓心 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$， $r=\dfrac{1}{2}$， $\because\overline{AB}=1=2r$， $\therefore\overline{AB}$ 爲直徑，

$\therefore x+my-m=0$，過圓心 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)\Rightarrow\dfrac{1}{2}+0-m=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

(　　　) 3. 圓 $x^2+y^2+2x-2y=0$， L 表過圓上一點 $P(-2,2)$ 的切線，則 L 過下列哪一點?

(1) $(1,2)$　(2) $(1,-3)$　(3) $(2,-1)$　(4) $(-1,3)$　(5) $(1,3)$.

解答 4

解析 過 P 之切線爲 $-2x+2y+2\cdot\dfrac{(-2+x)}{2}-2\cdot\left(\dfrac{2+y}{2}\right)=0\Rightarrow x-y+4=0$， $(-1,3)$ 代入成立 .

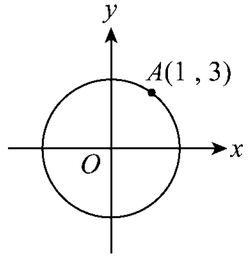
(　　　) 4.圓 $x^2+y^2=10$ 上一點 $A(1,3)$ 的切線斜率等於　(1) -3　(2) $-\dfrac{1}{3}$　(3)1　(4)3　(5) 2 .

解答 2

解析

半徑的斜率 $m_{AO}=\dfrac{3-0}{1-0}=3$，

$\therefore$ 切線之斜率爲 $-\dfrac{1}{3}$.



(　　　) 5.已知直線 L： $3x+4y-12=0$，圓 C： $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，若 P 在圓 C 上，則 P 至

直線 L 之最短距離爲　(1)0　(2) $\frac{2}{5}$　(3) $\frac{8}{5}$　(4) $\frac{12}{5}$　(5)2．

解答　1

解析　圓 C： $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，圓心 $A(2,1)$，半徑 $r=2$，

$d(A,L)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}<2=r$，表示直線 L 與圓 C 相交，

當 P 爲 L 與 C 的交點時， P 到直線 L 的距離爲 0，故選(1)．

二、多選題　（ 每題 10 分 ）

（　　　）1.過點 $A(3,2)$ 向圓 C： $x^2+y^2=4$ 作兩切線，切點爲 P 、 Q 兩點，下列何者正確?

(1)△ APQ 外接圓直徑爲 10

(2)△ APQ 外接圓方程式爲 $x^2+y^2-3x-2y=0$

(3)直線 PQ 方程式爲 $3x+2y=1$

(4)兩條切線斜率和 $m_1+m_2=\frac{12}{5}$

(5) $O(0,0)$ 爲圓心，直角△ OAP 面積爲 6．

解答　24

解析

(1)╳：如圖，直徑爲 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

(2)○：所求即以 $\overline{OA}$ 爲直徑的圓， $x\cdot(x-3)+y(y-2)=0\Rightarrow x^2+y^2-3x-2y=0$

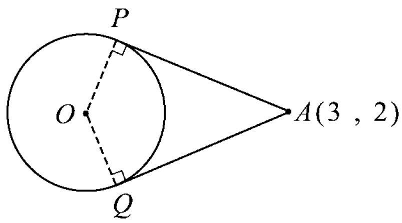
(3)╳：所求 $\Rightarrow 3\cdot x+2\cdot y=4$

(4)○：設切線 $y-2=m(x-3)\Rightarrow mx-y-3m+2=0$

$\Rightarrow d(O,L)=r\Rightarrow\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$\Rightarrow 9m^2-12m+4=4m^2+4$

$\Rightarrow 5m^2-12m=0\Rightarrow m_1+m_2=\frac{12}{5}$



(5)╳： $\overline{OA}=\sqrt{13}$， $\overline{OP}=2\Rightarrow\overline{AP}=3$，∴△ $OAP=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$，故選(2)(4)．

三、填充題　（ 每題 10 分 ）

1. 已知圓 C 和直線 L 的方程式如下： $C:x^2+y^2=5$， $L:x-y+1=0$．試問圓 C 和直線 L 的交點 ______．

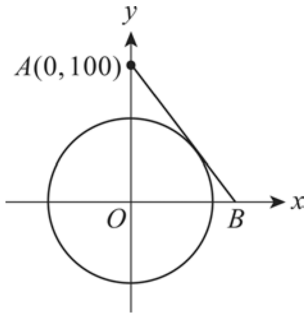
解答　是； $(1,2)$， $(-2,-1)$

解析　圓 C 和直線 L 是否相交，相當於方程組 $\begin{cases}x^2+y^2=5,\cdots\cdots①\\x-y+1=0,\cdots\cdots②\end{cases}$ 是否有實數解．

由②式 $y=x+1$ 代入①式，得 $x^2+(x+1)^2=5$，化簡爲 $x^2+x-2=0$，

解得 $x=1$ 或 -2，代回②式，得 $y=2$ 或 -1．故圓 C 和直線 L 相交於 $(1,2)$ 和 $(-2,-1)$ 兩點．

2. 有一半徑 60 公尺的圓形碉堡，甲站在碉堡的正北方與碉堡中心距離 100 公尺的 A 處，乙從碉堡中心向東走，要走多少公尺才會看到甲? ______________公尺。



解答 75

解析 設碉堡的圓心爲 $O(0,0)$，甲所在位置爲 $A(0,100)$．

乙看到甲時，兩人的連線 AB 恰爲圓的切線，設直線 AB 的方程式爲 $y-100=m(x-0)$，即 $mx-y+100=0$，圓心到直線的距離等於半徑，$\dfrac{100}{\sqrt{1+m^2}}=60$，解得 $m=\pm\dfrac{4}{3}$，由圖直線 AB 的斜率爲 $-\dfrac{4}{3}$，方程式爲 $4x+3y=300$，故 $B\ (75,0)$．乙需走 75 公尺才會看到甲．

3.求通過圓 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 上一點 $P(4,2)$ 且與圓相切的直線方程式．

解答 $3x+4y=20$

解析 $P(4,2)$ 爲圓上一點，由切線公式得 $(4-1)(x-1)+(2+2)(y+2)=25$，

即 $3(x-1)+4(y+2)=25$，化簡得 $3x+4y=20$ ．

4.求通過 $(-2,\ 3)$ 且與圓 $C: x^2+y^2+2x-4y+3=0$ 相切的直線方程式．________________________

解答 $x-y+5=0$

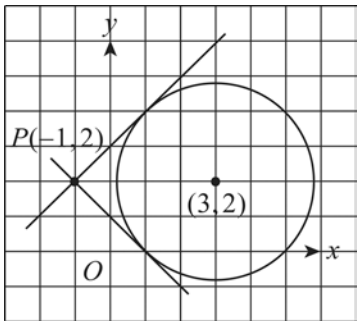
解析 將 $(-2,\ 3)$ 代入圓 $C: (-2)^2+3^2+2(-2)-4\times3+3=0$，

$(-2,\ 3)$ 爲圓上一點．圓 C 的標準式爲 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$ ．

其切線方程式爲 $(-2+1)(x+1)+(3-2)(y-2)=2$，

整理得 $-x+y-5=0$，即 $x-y+5=0$ ．

5.設圓 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=8$，求通過圓外一點 $P(-1,2)$ 且與圓 C 相切的直線方程式．



解答 $x-y+3=0$ 和 $x+y-1=0$

解析 過圓外一點可作兩切線，

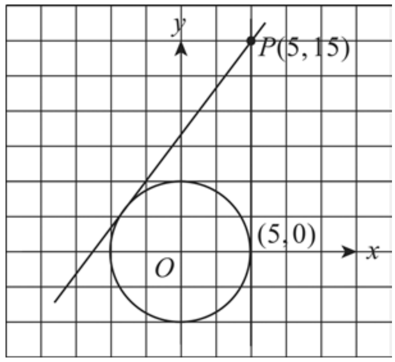
設 m 爲過 P 的切線 L 爲 $y-2=m(x+1)$，

即 $mx-y+(m+2)=0$ ．圓心 $(3,2)$ 到直線 L 的距離等於半徑 $\sqrt{8}$，即 $\dfrac{|3m-2+m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{8}$，

兩邊平方，得 $\dfrac{16m^2}{m^2+1}=8\Rightarrow16m^2=8(m^2+1)$， $m^2=1$，即 $m=\pm1$ ．

故所求切線方程式爲 $x-y+3=0$ 和 $x+y-1=0$ ．

6. 求過點 $P(5,15)$ 且與圓 $C: x^2+y^2=25$ 相切的直線方程式．_________



解答 $4x-3y+25=0$， $x=5$

解析 因爲 P 點到圓心 $O(0,0)$ 的距離 $\sqrt{5^2+15^2}>5$，所以 P 點在圓外，過 P 的切線有兩條．設 L 是過 P 的一切線，斜率爲 m，

則L的方程式爲$y-15=m(x-5)$，即$mx-y-5m+15=0$．L是切線，圓心$(0,0)$到直線的距離等於半徑 5，即$\dfrac{|-5m+15|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$，化簡$25(m-3)^2=25(m^2+1)$，得$m=\dfrac{4}{3}$．

故其中一條切線L的方程式爲$y-15=\dfrac{4}{3}(x-5)$，即$4x-3y+25=0$．

另外，過P而無斜率的直線方程式爲$x=5$爲圓C的另一條切線．

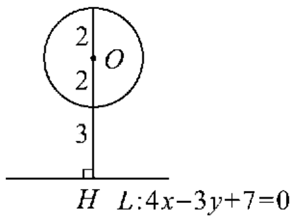
7.已知直線L：$4x-3y+7=0$及圓C：$(x-3)^2+(y+2)^2=4$上一點P，則

(1)試求P點到直線L距離的最大值及最小值＿＿＿＿＿＿；

(2)當P到直線L距離最小時，P點坐標爲何？＿＿＿＿＿＿＿。

解答 (1)7，3;(2)$\left(\dfrac{7}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$

解析



(1)$O(3,-2)$，$r=2$，$d(O,L)=\dfrac{|12+6+7|}{5}=5$，

$\therefore d(P,L)$的最大值爲$5+2=7$，最小值爲$5-2=3$．

(2)$\begin{cases}4x-3y+7=0\\3x+4y-1=0\end{cases}\Rightarrow H(-1,1)$，

$\therefore$由分點公式$\Rightarrow P\left(\dfrac{-2+9}{5},\dfrac{2-6}{5}\right)\Rightarrow P\left(\dfrac{7}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$．

8.若直線L：$3x-4y+k=0$與圓C：$x^2+y^2=4$不相交，求k之範圍．

解答 $k>10$或$k<-10$

解析 圓心$O(0,0)$，半徑$r=2$，$d(O,L)=\dfrac{|0-0+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}>2\Rightarrow|k|>10\Rightarrow k>10$或$k<-10$．

9.若直線L：$3x+4y+k=0$與圓C：$x^2+y^2+2x-4y+1=0$相交於二點，求k之範圍．

解答 $-15<k<5$

解析 原式$\Rightarrow C$：$(x+1)^2+(y-2)^2=4$，圓心$A(-1,2)$，半徑$r=2$，

$d(A,L)=\dfrac{|-3+8+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}<2\Rightarrow\dfrac{|k+5|}{5}<2\Rightarrow-15<k<5$．

10.求平行直線$x+y=1$且與圓$x^2+y^2=2$相切的直線方程式．＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答 $x+y+2=0$與$x+y-2=0$

解析 平行於直線$x+y=1$可設爲$x+y+k=0$，又該直線需與圓相切，

因此$\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad|k|=2\quad\Rightarrow\quad k=\pm2$．故直線爲$x+y\pm2=0$．

11.已知直線$L:x-y+2=0$和圓$C:x^2+y^2-6x-2y+8=0$．若P是圓C上與直線L距離最近的點，求點P的坐標．

解答 $(2,\ 2)$

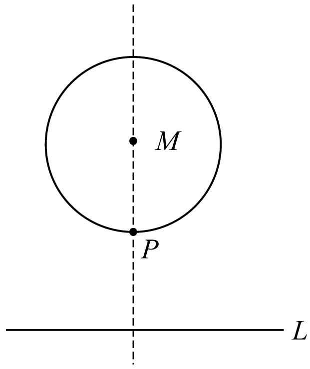
解析 圓C的標準式爲$(x-3)^2+(y-1)^2=2$，

圓心$M(3,\ 1)$，過圓心作L的垂線得$x+y-4=0$，

將$x+y-4=0$代入$x^2+y^2-6x-2y+8=0$，

解得$(x,\ y)=(2,\ 2)$，$(4,\ 0)$．

其中到直線的距離以$(2,\ 2)$較近，此即所求最近點P．



12.坐標平面上，圓$C:x^2+y^2+4x+2y-20=0$，圓外一點$P(2,\ -6)$，過P對圓C做切線，切點爲A，B，求過P，A，B三點的圓方程式．________

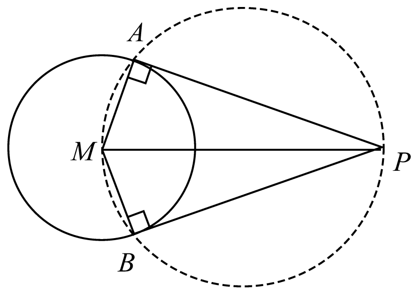
解答 $x^2+y^2+7y+2=0$

解析

圓$C:(x+2)^2+(y+1)^2=5^2$，圓心$M(-2,\ -1)$．

由圖可知四邊形$PAMB$之對角互補（$\angle PAM=\angle PBM=90^\circ$），過$P$，$A$，$B$三點之圓亦過$M$點，且所求圓是以$\overline{PM}$爲直徑之圓，即$(x+2)(x-2)+(y+1)(y+6)=0$．

整理得$x^2+y^2+7y+2=0$．



13.若過定點$A(-1,0)$且斜率爲m的直線與圓$x^2+y^2-4x-4=0$有交點，求m的範圍．

解答 $-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$

解析 過定點$A(-1,0)$且斜率爲m的直線可設爲$y=m(x+1)$，即$mx-y+m=0$．

圓$x^2+y^2-4x-4=0 \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2+y^2=8$．

若直線與圓有交點，則直線與圓心$(2,0)$的距離要小於等於半徑$\sqrt{8}$，

即$\dfrac{|2m+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\le\sqrt{8} \quad\Rightarrow\quad 9m^2\le 8(m^2+1) \quad\Rightarrow\quad m^2\le 8 \quad\Rightarrow\quad -2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$．

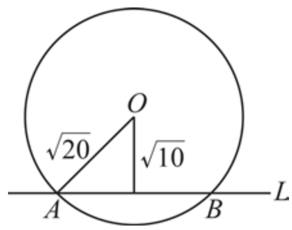
14.直線$L:3x+y=7$與圓$C:(x+1)^2+y^2=20$是否相交？若相交，求L被C所截得的弦長．

解答 是，$2\sqrt{10}$

解析 由圓標準式可知圓心O爲$(-1,0)$，半徑爲$\sqrt{20}$．

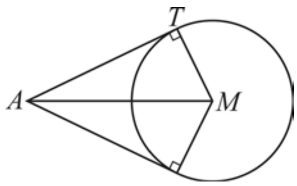
而L與圓心的距離爲$\dfrac{|3(-1)+0-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}<\sqrt{20}$，

故L與圓C相交於兩點．且所截弦長爲$2\sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}=2\sqrt{10}$．



15.設圓$C: x^2+(y-2)^2=9$，自$A(1,-1)$作圓C的切線交圓C於點T，求切線段$\overline{AT}$的長．

解答 1



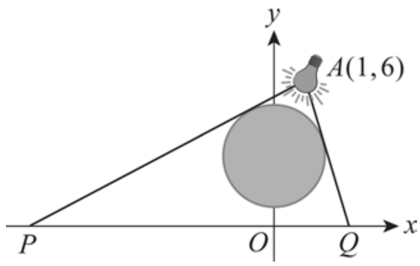
解析 由圓標準式可知圓心M爲$(0,2)$，半徑爲 3．

且A與圓心的距離爲$\sqrt{(1-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$，

由圓的切線性質可知△MAT爲直角三角形，且$\overline{MA}$爲斜邊，

再由畢氏定理知$\overline{AT}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=1$．

16.在坐標平面上$A(1,6)$處有一光源，將圓$x^2+(y-3)^2=5$投射到x軸上，如下圖所示，求其在x軸上的影子$\overline{PQ}$長．



解答 15

解析 由圖可知P，Q兩點爲過A且與圓相切的兩直線與x軸的交點．設過定點$A(1,6)$且斜率爲m的切線爲$y-6=m(x-1)$，即$mx-y+(6-m)=0$．圓心$(0,3)$至切線的距離爲$\sqrt{5}$，

$$\frac{|-3+(6-m)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow (2m-1)(m+2)=0 \Rightarrow m=-2,\ \frac{1}{2}.$$

切線AP的方程式爲$x-2y+11=0$及切線AQ的方程式爲$2x+y-8=0$，

且兩直線與x軸的交點爲$(-11,0)$及$(4,0)$，故$\overline{PQ}=|-11-4|=15$．