高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.12.22					
範圍	3-1 圓方程式	班級		姓名	
		座號			

一、多選題 (每題 10 分)

( ) 1. 下列何者的圖形爲一圓? (1) $x^2+y^2=4$ (2) $(x-1)^2+(y+1)^2=-4$

(3) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$ (4) $\begin{cases} x=1+3\cos\theta, \\ y=2+3\sin\theta, \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$.

解答 14

解析 根據圓的標準式，

(1)是圓心 $(0,0)$，半徑 2 的圓．(2)不是圓．

(3)配方得 $(x+1)^2+(y+2)^2=0$，其圖形爲點 $(-1,-2)$ ．

根據圓的參數式，(4)代表圓心 $(1,2)$，半徑 3 的圓．

( ) 2. 三直線 $x-y-9=0$，$x+2y=0$ 及 $3x-y-7=0$ 圍成一三角形，設此三角形外接圓的方程式爲 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，則

(1)此三角形的三頂點爲 $(2,-1)$，$(6,-3)$，$(-1,-10)$

(2) $a+b=8$ (3) $2a-b=20$ (4)外接圓圓心的坐標爲 $(2,-6)$

(5) $a^2+b^2-4c=100$ ．

解答 1245

解析 解 $\begin{cases} x-y-9=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(6,-3)$，

$\begin{cases} x-y-9=0 \\ 3x-y-7=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-1,-10)$，

$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y-7=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2,-1)$，

$\therefore$三頂點爲 $(2,-1)$，$(6,-3)$，$(-1,-10)$，

$(2,-1)$ 代入圓得 $4+1+2a-b+c=0$ $a=-4$

$(6,-3)$ 代入圓得 $36+9+6a-3b+c=0$ $\Rightarrow$ $b=12$

$(-1,-10)$ 代入圓得 $1+100-a-10b+c=0$ $c=15$

$\therefore x^2+y^2-4x+12y+15=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+6)^2=25$，

二、填充題 (每題 10 分)

1. 求合於下列條件之圓方程式：

(1)圓心在點 $(-3,2)$，半徑爲 6 之圓方程式爲__________；

(2)圓心在點 $A(1,-3)$，且圓通過點 $P(4,1)$ 之圓方程式爲__________ ．

解答 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=36$;(2) $(x-1)^2+(y+3)^2=25$

解析 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=36$ ．

(2)先求半徑 $r=\overline{PA}=\sqrt{(4-1)^2+(1+3)^2}=5$，

$\therefore$圓方程式爲 $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ ．

2. 設 $A(-2,1)$，$B(4,-5)$ 爲坐標平面上兩定點，試求以線段 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓方程式爲__________ ．

解答　$(x-1)^2+(y+2)^2=18$

解析　SOL 一

$\because \overline{AB}$之中點，即爲圓心，$\therefore$圓心爲$\left(\frac{-2+4}{2},\frac{1-5}{2}\right)=(1,-2)$，

半徑$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\left[4-(-2)\right]^2+(-5-1)^2}=3\sqrt{2}$，$\therefore$圓方程式爲$(x-1)^2+(y+2)^2=18$.

SOL 二

直徑式$(x+2)(x-4)+(y-1)(y+5)=0$

$x^2+y^2-2x+4y-13=0$

3. 求圓：$3x^2+3y^2-5x-7y+1=0$的圓心及半徑爲__________ .

解答　圓心爲$\left(\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right)$，半徑爲$\frac{\sqrt{62}}{6}$

解析　$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}y+\frac{1}{3}=0\Rightarrow\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2=\frac{62}{36}$，

$\therefore$圓心爲$\left(\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right)$，半徑爲$\frac{\sqrt{62}}{6}$.

4. 在坐標平面上，已知兩個定點$A(3,5)$，$B(-10,4)$，設$P(x,y)$爲動點，且知$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，則動點$P(x,y)$的軌跡方程式爲__________ .

解答　$5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$

解析　$\because \overline{PA}:\overline{PB}=2:3\Rightarrow 3\overline{PA}=2\overline{PB}$，

又$P(x,y)$，$A(3,5)$，$B(-10,4)$，$\therefore 3\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x+10)^2+(y-4)^2}$，

平方後移項整理$\Rightarrow 9\left(x^2+y^2-6x-10y+34\right)-4\left(x^2+y^2+20x-8y+116\right)=0$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$爲所求（此方程式的圖形爲一圓）.

5. 設k爲實數，方程式$x^2+y^2+4x-2ky+(k+6)=0$的圖形爲一圓，則k的範圍爲__________ .

解答　$k>2$或$k<-1$

解析　$x^2+y^2+4x-2ky=-k-6\Rightarrow(x+2)^2+(y-k)^2=k^2-k-2$，

$k^2-k-2>0\Rightarrow(k-2)(k+1)>0\Rightarrow k>2$或$k<-1$.

6. 求符合下列條件之圓方程式：

(1)圓心在$x+2y=3$上且過$(5,1)$，$(3,1)$之圓方程式爲__________；

(2)過點$A(1,4)$，$B(3,-2)$且$\overline{AB}$之弦心距爲$\sqrt{10}$之圓方程式爲__________ .

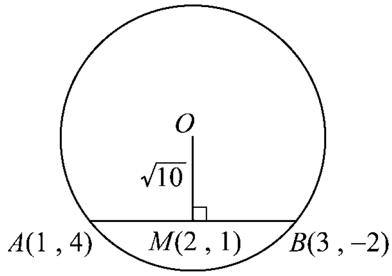
解答　(1)$(x-4)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$;(2)$(x+1)^2+y^2=20$或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

解析　(1)圓心在$x+2y=3$上，$\therefore$設圓心爲$(3-2t,t)$

$\Rightarrow\sqrt{(2t+2)^2+(1-t)^2}=\sqrt{4t^2+(1-t)^2}\Rightarrow 8t+4=0$，$\therefore t=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$圓心爲$\left(4,-\frac{1}{2}\right)$，$\therefore$半徑$=\sqrt{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{4}}$，

故圓為 $(x-4)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$.



(2)設 M 為 A、B 中點，O 為圓心，r 為半徑，

$M(2,1)$，$m_{\overline{AB}}=-3$，$\therefore m_{\overline{OM}}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \overleftrightarrow{OM}: y-1=\frac{1}{3}(x-2)\Rightarrow x-3y+1=0$，

$\therefore$設圓心 O 為 $(3t-1,t)$，

$\because \overline{OM}=\sqrt{10}$，$\therefore \sqrt{(3t-3)^2+(t-1)^2}=\sqrt{10}\Rightarrow (t-1)^2=1$，

$\therefore t-1=\pm1\Rightarrow t=0$ 或 2，$\therefore$圓心為 $(-1,0)$ 或 $(5,2)$，而 $r=\overline{OA}=\sqrt{20}$，

故圓為 $(x+1)^2+y^2=20$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$.

7. 自 $P(1,-2)$ 作圓 $C: x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 的二切線，分別切圓 C 於 A、B 兩點．則 $\triangle PAB$ 之外接圓的方程式為____________ .

解答　$x^2+y^2+2x+y-5=0$

解析　$x^2+y^2+6x-2y+6=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=4\Rightarrow$圓心 $O(-3,1)$，
$\triangle PAB$ 之外接圓即四邊形 $PAOB$ 之外接圓，即以 $\overline{PO}$ 為直徑之圓，
利用直徑式 $(x-1)(x+3)+(y+2)(y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y-5=0$.

8. 若點 $P(k-4,k-2)$ 在圓 $C: x^2+y^2+kx-4y+5=0$ 的外部，求 k 的範圍為____________ .

解答　$k<-2$ 或 $2<k<3$ 或 $k>\frac{11}{3}$

解析　圓 C 存在 $\Leftrightarrow k^2+(-4)^2-4\times5>0$，$\therefore k^2>4$，故 $k>2$ 或 $k<-2\cdots\cdots$①
$\because P$ 在圓 C 外部，$\therefore (k-4)^2+(k-2)^2+k(k-4)-4(k-2)+5>0$
$\Rightarrow 3k^2-20k+33>0\Rightarrow(3k-11)(k-3)>0\Rightarrow k>\frac{11}{3}$ 或 $k<3\cdots\cdots$②
由①②得 $k<-2$ 或 $2<k<3$ 或 $k>\frac{11}{3}$.

9. 設 $P(x,y)$ 是圓 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 上的點，則 $3x-2y$ 的最小值為____________ .

解答　$7-\sqrt{13}$

解析　利用柯西不等式，
$\left[(x-1)^2+(y+2)^2\right]\left[3^2+(-2)^2\right]\ge(3x-3-2y-4)^2\Rightarrow 13\ge(3x-2y-7)^2$，
$\therefore -\sqrt{13}\le 3x-2y-7\le\sqrt{13}\Rightarrow 7-\sqrt{13}\le 3x-2y\le 7+\sqrt{13}$，故最小值為 $7-\sqrt{13}$.

10. 求作一個圓 C，使圓 C 通過 $A(5,10)$，$B(6,9)$，$C(-2,3)$ 三點．________________________

解答　$x^2+y^2-4x-12y+15=0$

解析　設所求圓 C 的方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，
將 $(5,10)$，$(6,9)$，$(-2,3)$ 分別代入上式，得

$$\begin{cases}25+100+5d+10e+f=0\\36+81+6d+9e+f=0\\4+9-2d+3e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5d+10e+f=-125\cdots\cdots①\\6d+9e+f=-117\cdots\cdots②\\-2d+3e+f=-13\cdots\cdots③\end{cases}$$

聯立①②③解之，得 $d=-4$， $e=-12$， $f=15$，

故所求圓 C 之方程式爲 $x^2+y^2-4x-12y+15=0$.

11. 設 k 爲實數，方程式 $C:x^2+y^2-2kx-2y+2k+4=0$.

(1)若 C 表一圓，求 k 的範圍． (2)若 C 表一點，求 k 的值．

解答 (1) $k>3$ 或 $k<-1$;(2) $k=3$ 或 -1

解析 將方程式 $x^2+y^2-2kx-2y+2k+4=0$ 配方得

$(x-k)^2+(y-1)^2=k^2-2k-3$.

(1) C 表一圓，所以 $k^2-2k-3>0$，即 $(k-3)(k+1)>0$， $k>3$ 或 $k<-1$.

(2) C 表一點，所以 $k^2-2k-3=0$，得 $k=3$ 或 -1 .

12. 設 $A(1,4)$ 與 $B(3,-2)$ 爲坐標平面上兩點，若 $\overline{AB}$ 爲圓 C 的一弦．且距離圓心爲 $\sqrt{10}$，求圓 C 的方程式．

解答 $(x+1)^2+y^2=20$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$

解析 $\overline{AB}$ 中點 M $(2,1)$，又 $m_{\overline{AB}}=\dfrac{4-(-2)}{1-3}=-3$，

$\therefore$ $\overline{AB}$ 之中垂線爲 $y-1=\dfrac{1}{3}(x-2)\Rightarrow x-3y+1=0$，

設圓心 $O(3t-1,t)$，又 $\overline{OM}=\sqrt{10}\Rightarrow\sqrt{(3t-3)^2+(t-1)^2}=\sqrt{10}\Rightarrow t=0$ 或 2，

圓心 $(-1,0)$ 或 $(5,2)$，半徑 $=2\sqrt{5}$，所求爲 $(x+1)^2+y^2=20$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$.

13. 設圓 C 通過點 $(4,2)$ 及點 $(1,-5)$ 且其圓心在直線 $x-3y-7=0$ 上，求圓 C 的方程式．

解答 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{29}{2}$

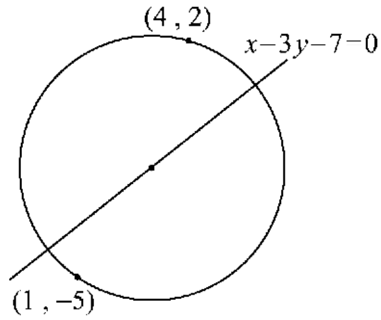
解析 因圓心在直線 $x-3y-7=0$ 上，故可設圓心的坐標爲 $(3t+7,t)$，

因圓心與點 $(4,2)$ 及點 $(1,-5)$ 等距，

故 $\sqrt{\left[(3t+7)-4\right]^2+(t-2)^2}=\sqrt{\left[(3t+7)-1\right]^2+(t+5)^2}\Rightarrow t=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ 圓心爲 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，半徑爲 $\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-4\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}-2\right)^2}=\dfrac{\sqrt{58}}{2}$，

故圓 C 之方程式爲 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{29}{2}$.



14.設圓$C:(x-3)^2+(y+1)^2=1$，求與圓C有相同的圓心且面積爲圓C面積 2 倍的圓．求圓方程式________

解答　$(x-3)^2+(y+1)^2=2$

解析

(2)所求的圓面積爲圓C面積的 2 倍，即半徑爲圓C半徑的$\sqrt{2}$倍．

圓$C:(x-3)^2+(y+1)^2=1$圓心爲$(3,-1)$，半徑爲 1，

故所求圓的圓心爲$(3,-1)$，半徑爲$\sqrt{2}$，圓方程式爲$(x-3)^2+(y+1)^2=2$．

15. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$．將圓以參數式表示________________________

解答　$\begin{cases} x=-2+3\cos\theta, \\ y=1+3\sin\theta, \end{cases} (0\le\theta<2\pi)$

解析

(2)圓$(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$的參數式爲$\begin{cases} x+2=3\cos\theta, \\ y-1=3\sin\theta, \end{cases} (0\le\theta<2\pi)$，

即$\begin{cases} x=-2+3\cos\theta, \\ y=1+3\sin\theta, \end{cases} (0\le\theta<2\pi)$．

16. 設(a,b)爲圓$C:x^2+y^2-4x-2y+4=0$上的點，求$a^2+(b-1)^2$的最大值．

解答　9

解析　將圓C整理成標準式$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，

因爲(a,b)爲圓上的點，可設$a=2+\cos\theta$，$b=1+\sin\theta$，$(0\le\theta<2\pi)$

則$a^2+(b-1)^2=(2+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta-1)^2=4+4\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=5+4\cos\theta$（因爲$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$）$\le 9$，（因爲$\cos\theta\le 1$）

故在$\cos\theta=1$（即$\theta=0$）時，$a^2+(b-1)^2$有最大值 9．

17. 獵人養了大小兩隻獵犬，每次狩獵時，都讓兩獵犬守候在相距 30 公尺的兩位置上．當獵人射下獵物時，兩獵犬會同時向著獵物直衝過去．若大獵犬的速度是小獵犬的 2 倍，

(1)兩獵犬會同時抵達獵物的所有可能點P會構成什麼圖形?

(2)求小獵犬會先追到獵物的範圍區域面積．

解答　(1)圓;(2) 400π 平方公尺

解析　(1)設大獵犬與小獵犬分別在$A(0,0)$，$B(30,0)$兩點，

兩獵犬會同時抵達獵物的點爲$P(x,y)$．

大獵犬的速度是小獵犬的 2 倍，$\overline{PA}=2\overline{PB}$．

得$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-30)^2+y^2}$，兩邊平方，得$x^2+y^2=4\left((x-30)^2+y^2\right)$，

整理$3x^2+3y^2-240x+3600=0$，即$x^2+y^2-80x+1200=0$，$(x-40)^2+y^2=400$．

故所有可能P點所成的圖形爲一圓，圓心$(40,0)$，半徑爲 20 公尺．

(2)小獵犬會先追到獵物的範圍即圓$(x-40)^2+y^2=400$的內部，其面積爲400π平方公尺．

18. 設圓C的方程式為$x^2+y^2=k$，

(1)若圓C通過$A\left(\sqrt{3},-1\right)$，求$k$值．

(2)若$P(1,-2)$在圓C內部，$Q(-3,3)$在圓C外部，求k的範圍．

解答　(1)4;(2)$5<k<18$

解析　(1)將點$A\left(\sqrt{3},-1\right)$代入圓方程式為$x^2+y^2=k$，得$\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2=k \quad \Rightarrow \quad k=4$．

(2)圓C的圓心為原點$O(0,0)$，半徑$\sqrt{k}$，因為

$\overline{OP}=\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$，$\overline{OQ}=\sqrt{(-3-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{18}$，

所以$\sqrt{5}<\sqrt{k}<\sqrt{18}$，即$k$的範圍為$5<k<18$．

19. 已知x，y是滿足$x^2+y^2=9$的實數，求xy的最大值．________________

解答　$\dfrac{9}{2}$

解析　利用圓的參數式，可設$x=3\cos\theta$，$y=3\sin\theta(0\le\theta<2\pi)$．此時

$xy=(3\cos\theta)(3\sin\theta)=9\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{2}\sin 2\theta$．

因為$0\le 2\theta<4\pi$，所以$\sin 2\theta\le 1$，即$xy\le\dfrac{9}{2}\times 1=\dfrac{9}{2}$．

故xy的最大值為$\dfrac{9}{2}$．（此時$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，即$x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$）

20. 求合下列條件的圓方程式：

(1)與$x^2+y^2+2x-4y-1=0$同圓心，且通過點$(3,5)$的圓．

____

(2)通過兩點$(1,4)$，$(0,3)$且圓心在x軸上的圓．________________

解答　(1)$(x+1)^2+(y-2)^2=25$;(2)$(x-4)^2+y^2=25$

解析　.

(1)圓$x^2+y^2+2x-4y-1=0$的圓心為$(-1,2)$，

所求圓的圓心亦為$(-1,2)$．

設圓方程式為$(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$，代入通過的點$(3,5)$，得$4^2+3^2=r^2$．

故圓方程式為$(x+1)^2+(y-2)^2=25$．

(2)設圓心$(a,0)$，半徑r，圓方程式為$(x-a)^2+y^2=r^2$．

將通過的點$(1,4)$，$(0,3)$代入，得$\begin{cases}(1-a)^2+16=r^2\\ a^2+9=r^2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=4$，$r=5$．

故圓方程式為$(x-4)^2+y^2=25$．

21. 求圓心在直線$2x-3y=5$上且通過兩點$(6,\ 0)$，$(5,\ 3)$的圓方程式．

解答　$(x-4)^2+(y-1)^2=5$

解析　設圓心$M(h,\ k)$．

因圓心在直線 $2x-3y=5$ 上，所以 $2h-3k=5$.

又圓通過兩點 $A(6,\ 0)$， $B(5,\ 3)$，所以 $\overline{MA}=\overline{MB}$，

即 $(h-6)^2+k^2=(h-5)^2+(k-3)^2$，得 $h-3k=1$.

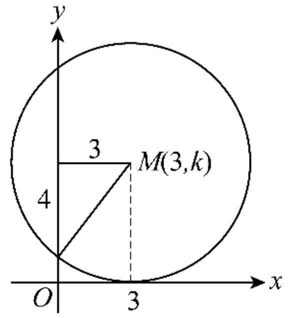
解 $\begin{cases}2h-3k=5\\ h-3k=1\end{cases}$，得 $(h,\ k)=(4,\ 1)$，半徑 $=\overline{MA}=\sqrt{(4-6)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$，

故圓方程式爲 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$.

22. 設圓 C 與 x 軸相切於 $(3,\ 0)$ 且截 y 軸的弦長爲 8，求圓 C 的方程式 .

解答 $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ 或 $(x-3)^2+(y+5)^2=25$

解析



圓 C 與 x 軸相切於 $(3,\ 0)$，設圓心 M 爲 $(3,\ k)$，

則半徑爲 $|k|$，且圓心 M 到 y 軸的距離 $=3$.

由截 y 軸的弦長爲 8，得

$k^2=3^2+4^2=25 \quad \Rightarrow \quad k=\pm 5$.

故圓 C 的方程式爲 $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ 或

$(x-3)^2+(y+5)^2=25$.

23. 求以 $(12,\ -5)$ 爲圓心且與圓 $x^2+y^2=4$ 相切的圓方程式 .

解答 $(x-12)^2+(y+5)^2=121$ 或 $(x-12)^2+(y+5)^2=225$

解析 設所求圓的圓心爲 M，半徑爲 r .

兩圓的連心線長 $\overline{OM}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$.

若兩圓外切，則 $\overline{OM}=2+r \quad \Rightarrow \quad r=11$，

若兩圓內切，則 $\overline{OM}=r-2 \quad \Rightarrow \quad r=15$，

故圓方程式爲 $(x-12)^2+(y+5)^2=121$ 或 $(x-12)^2+(y+5)^2=225$.