高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.11.25					
範圍	2-5 空間直線	班級		姓名	
		座號			

一、多選題 (每題 10 分)

(　　) 1.直線 L 的對稱比例式為 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$，下列哪些敘述是正確的?

(1)點 $(1,-2,3)$ 在 L 上 (2)點 $(0,0,0)$ 在 L 上 (3)向量 $(1,2,-3)$ 為 L 的一個方向向量

(4)向量 $(2,4,6)$ 為 L 的一個方向向量 (5) $\begin{cases} x=2+t, \\ y=2t, \\ z=-3t, \end{cases}$ （t 為實數）是 L 的參數式．

解答 135

解析 (1)因為 $\frac{1-1}{1}=\frac{(-2)+2}{2}=\frac{3-3}{-3}=0$，所以點 $(1,-2,3)$ 在直線 L 上．

(2)因為 $\frac{0-1}{1}\neq\frac{0+2}{2}=\frac{0-3}{-3}$，所以點 $(0,0,0)$ 不在直線 L 上．

(3)由對稱比例式可知向量 $(1,2,-3)$ 為直線 L 的一個方向向量．

(4) $(2,4,6)$ 和 $(1,2,-3)$ 不平行，故向量 $(2,4,6)$ 不是直線 L 的一個方向向量．

(5) $\begin{cases} x=2+t, \\ y=2t, \\ z=-3t, \end{cases}$ （t 是實數）的方向向量為 $(1,2,-3)$ 且過點 $(2,0,0)$，

將點 $(2,0,0)$ 代入 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ 可得 $\frac{2-1}{1}=\frac{0+2}{2}=\frac{0-3}{-3}$，即點 $(2,0,0)$ 在直線 L 上，故 $\begin{cases} x=2+t, \\ y=2t, \\ z=-3t, \end{cases}$ （t 是實數）可為直線 L 的參數式．

二、計算題 (每題 10 分)

1. 新年晚會需要投射兩道雷射燈光在舞臺處交會．現在我們設定空間坐標，一道雷射由 $(0,0,2)$ 朝向 $(5,8,3)$ 發射，另一道則由點 $(0,7,a)$ 沿平行於 x 軸方向發射，試問

(1)當 a 為何值時，兩雷射燈光會相交? ________________

(2)兩道燈光在舞臺處交會的坐標為何? ________________

解答 (1) $\frac{23}{8}$;(2) $\left(\frac{35}{8},7,\frac{23}{8}\right)$

解析 一道雷射由 $(0,0,2)$ 朝向 $(5,8,3)$ 發射，其路徑的直線參數式為 $\begin{cases} x=5s, \\ y=8s, \\ z=2+s, \end{cases}$ （s 為實數），

另一道由點 $(0,7,a)$ 沿平行於 x 軸方向 $\overrightarrow{v_x}=(1,0,0)$ 發射，其路徑的直線參數式為

$\begin{cases} x=0+t, \\ y=7, \\ z=a, \end{cases}$ （t 為實數），因為於舞臺處交會，所以 $\begin{cases} 5s=t, \\ 8s=7, \\ 2+s=a, \end{cases}$ 解得 $s=\frac{7}{8}$，$t=\frac{35}{8}$，$a=\frac{23}{8}$，

舞臺交會處的坐標爲$\left(\dfrac{35}{8},7,\dfrac{23}{8}\right)$．

2. 求通過點$A(1,5,-3)$和$B(3,4,1)$的直線之參數式與對稱比例式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 參數式爲$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=5-1t, \\ z=-3+4t, \end{cases}$（$t$是實數）；對稱比例式爲$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+3}{4}$

解析 由題意知$\overrightarrow{AB}=(2,-1,4)$，故直線參數式爲$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=5-1t, \\ z=-3+4t, \end{cases}$（$t$是實數），

且對稱比例式爲$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+3}{4}$．

3. 求直線$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{4}$與平面$E:3x-2y+z=1$的交點＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $(5,\ 9,\ 4)$

解析 令$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{4}=t$，$t$是實數，得$x=2t+1$，$y=3t+3$，$z=4t-4$，

代入$E:3x-2y+z=1$，得$4t=8$，解得$t=2$．

故直線L與平面E交於點$(x,\ y,\ z)=(5,\ 9,\ 4)$．

4. 設兩歪斜線$L_1:\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2t+1 \end{cases}$與$x$軸的公垂線爲$L$，求$L$的參數式＿＿＿＿＿及公垂線段長＿＿＿＿．

解答 $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2}{5}t \\ z=-\dfrac{1}{5}t \end{cases}$，$t$是實數；$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解析 設公垂線L與L_1相交於P點，與x軸相交於Q點．

因爲P點與Q點分別在直線L_1與x軸上，所以可設

P點坐標爲$(0,\ t,\ 2t+1)$，t是實數．Q點坐標爲$(s,\ 0,\ 0)$，s是實數．

由此假設知$\overrightarrow{PQ}=(s,\ -t,\ -2t-1)$．

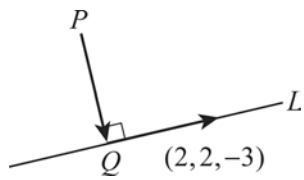
因爲$\overrightarrow{PQ}$和直線L_1與x軸的方向向量$(0,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 0,\ 0)$均垂直，所以

$\begin{cases} (s,\ -t,\ -2t-1)\cdot(0,\ 1,\ 2)=0, \\ (s,\ -t,\ -2t-1)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} -t-4t-2=0 \\ s=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} t=-\dfrac{2}{5}, \\ s=0. \end{cases}$

因此，P點坐標爲$\left(0,\ -\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$，$Q$點坐標爲$(0,\ 0,\ 0)$，且$\overrightarrow{PQ}=\left(0,\ \dfrac{2}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right)$，故$L$

的參數式$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2}{5}t \\ z=-\dfrac{1}{5}t \end{cases}$，$t$是實數，其公垂線段長為$\overline{PQ}=\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

5. 求點$P(3,2,6)$到直線$L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$的距離＿＿＿＿＿＿＿．



解答　6

解析　從點$P(3,2,6)$作直線L的垂線PQ與L交於Q點．

由直線L的對稱比例式可令Q點坐標為$(-1+2t,2t,2-3t)$，t為實數，

$\overrightarrow{PQ}=(2t-4,2t-2,-3t-4)$．

$\overrightarrow{PQ}\perp L$，$\overrightarrow{PQ}$和$L$方向向量$(2,2,-3)$垂直，$(2t-4,2t-2,-3t-4)\cdot(2,2,-3)=0$，得$t=0$，

即$\overrightarrow{PQ}=(-4,-2,-4)$．故點到直線$L$的距離為$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-4)^2}=6$．

6. 求兩平行線$L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$與$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$之間的距離＿＿＿＿＿＿＿．

解答　3

解析　在直線L_1上取一點$P(1,\ 0,\ -2)$，則P到L_2的距離就是兩平行線L_1與L_2的距離．從P作直線L_2的垂線PQ與L_2交於Q，由直線L_2的對稱比例式Q點$(2t+1,\ 2t+3,\ t+1)$，t是實數，得$\overrightarrow{PQ}=(2t,\ 2t+3,\ t+3)$．$\overrightarrow{PQ}\perp L_2$，$\overrightarrow{PQ}$和$L_2$的方向向量$(2,\ 2,\ 1)$垂直，

即$(2t,\ 2t+3,\ t+3)\cdot(2,\ 2,\ 1)=0 \quad\Rightarrow\quad 9t+9=0 \quad\Rightarrow\quad t=-1$，

即$\overrightarrow{PQ}=(-2,\ 1,\ 2)$．故兩平行線$L_1$與$L_2$的距離為$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$．

7. (1)求通過點$(2,\ 3,\ 4)$與平面$x-y+2z=5$垂直的直線參數式＿＿＿＿＿＿＿．

(2)求通過點$(3,\ 2,\ 1)$與z軸平行的直線參數式＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)$\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4+2t \end{cases}$，$t$是實數;　　(2)$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1+t \end{cases}$，$t$是實數

解析　(1)直線與平面$x-y+2z=5$垂直，平面$x-y+2z=5$的法向量$(1,\ -1,\ 2)$即為此直線的一個方向向量，又通過點$(2,\ 3,\ 4)$，故其參數式為$\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4+2t \end{cases}$，$t$是實數．

(2) z軸的方向向量為$(0,\ 0,\ 1)$，此直線過點$(3,\ 2,\ 1)$，參數式為$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1+t \end{cases}$，$t$是實數．

8. 求包含二相交直線 $L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ 和 $L_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ 的平面方程式________．

解答　$x-y=5$

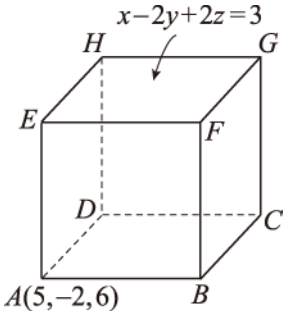
解析　設 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ 爲所求平面的法向量．

因爲 $\overrightarrow{n}$ 與二直線 L_1 與 L_2 的方向向量 $(2,2,-1)$，$(1,1,2)$ 均垂直，所以

$$\begin{cases}(a,b,c)\perp(2,2,-1)\\(a,b,c)\perp(1,1,2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,2,-1)=0\\(a,b,c)\cdot(1,1,2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+2b-c=0\\a+b+2c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b,\\c=0,\end{cases}$$

即 $\overrightarrow{n}=-b(1,-1,0)$．又直線 $L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ 和 $L_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ 明顯交於點 $(3,-2,1)$，故所求平面的方程式爲 $x-y=5$．

9. 在坐標空間中，有一個正立方體 $ABCD-EFGH$，如下圖，它的面 $EFGH$ 所在的平面方程式爲 $x-2y+2z=3$，且 A 點坐標爲 $(5,-2,6)$．求



(1) E 點坐標________．

(2)直線 AE 的對稱比例式________．

解答　(1) $(3,2,2)$；(2) $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-6}{2}$

解析　因爲 $\overrightarrow{AE}$ 與平面 $EFGH$ 的法向量平行，所以，$\overrightarrow{AE}=(1,-2,2)t$，即直線 AE 的參數式爲

$$\begin{cases}x=5+t,\\y=-2-2t,\\z=6+2t,\end{cases}$$（t 爲實數）且其對稱比例式爲 $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-6}{2}$．

又因爲 E 點在平面 $x-2y+2z=3$ 上，所以 $(5+t)-2(-2-2t)+2(6+2t)=3$，

解得 $t=-2$，故 E 點坐標爲 $(5-2,-2-2(-2),6+2(-2))=(3,2,2)$．

10.求兩相交直線 $L_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 和 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{1}$ 的交點坐標________．

解答　$(-2,0,1)$

解析　設兩直線交點爲 $P(x,y,z)$．P 在直線 L_1 上，令 $x=4s+2$，$y=-s-1$，$z=2s+3$，

又 P 在直線 L_2 上，令 $x=2t$，$y=3t+3$，$z=t+2$，t 爲實數．

由 P 是兩直線的交點可得 $\begin{cases}4s+2=2t\\-s-1=3t+3\\2s+3=t+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2s-t=-1\cdots\cdots(1)\\s+3t=-4\cdots\cdots(2)\\2s-t=-1\cdots\cdots(3)\end{cases}$

由(1)，(2)式解得 $s=-1$，$t=-1$，代入(3)式也滿足，故 L_1 與 L_2 的交點 $(-2,0,1)$．

11.求兩平面 $2x-3y+2z=2$ 和 $6x+y+z=1$ 的交線 L 之參數式________．

解答　$\begin{cases}x=t\\y=-2t\\z=1-4t\end{cases}$，$t$ 是實數

解析　將式子 $6x+y+z=1$　$\times2$　減去 $2x-3y+2z=2$，

得 $10x+5y=0$，即 $2x+y=0$．

令 $x=t$，得 $y=-2t$，將其代入 $6x+y+z=1$，得 $z=1-4t$．

故 L 的參數式爲 $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1-4t \end{cases}$，$t$ 是實數．

12.已知 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ 表示一直線，下列哪些選項是正確的?

(1)其方向向量爲 $(1,\ 1,\ 3)$．　　(2)點 $(2,\ 3,\ 7)$ 在直線上．

(3)與直線 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ 平行．　　(4)與平面 $x+2y-z=1$ 平行．

(5)此直線落在平面 $3x+3y-2z=1$ 上．

解答　(1)(2)(3)(5)

解析　將 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ 中的兩式相減消去 z，得 $-x+y=1$，若令 $x=t$，則 $y=1+t$，

代回方程式可得 $z=1+3t$，即此直線參數式爲 $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$ （t 是實數）．

(1) $(1,\ 1,\ 3)$ 爲直線的一個方向向量．

(2)當 $t=2$ 時，可得點 $(2,\ 3,\ 7)$，故點 $(2,\ 3,\ 7)$ 在直線上．

(3)直線 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ 和 $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$ 有相同的方向向量 $(1,\ 1,\ 3)$，

但是點 $(1,\ 1,\ 3)$ 不在 $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$ 上，故兩直線互相平行．

(4)平面 $x+2y-z=1$ 的一個法向量爲 $(1,\ 2,\ -1)$，因爲 $(1,\ 2,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ 3)=0$，

又直線上一點 $(0,\ 1,\ 1)$ 在 $x+2y-z=1$ 上，所以直線落在平面 $x+2y-z=1$ 上．

(5)平面 $3x+3y-2z=1$ 的一個法向量爲 $(3,\ 3,\ -2)$，因爲 $(3,\ 3,\ -2)\cdot(1,\ 1,\ 3)=0$，

又直線上一點 $(0,\ 1,\ 1)$ 在 $3x+3y-2z=1$ 上，所以直線落在平面 $3x+3y-2z=1$ 上．

13.求包含點 $P(1,2,3)$ 和直線 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的平面 E 之方程式________________________．

解答　$2x-y+3z=9$

解析　由直線 L 的對稱比例式 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 知道

點 $Q(3,0,1)$ 及向量 $\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$ 在直線 L 上，也在平面 E 上．

又點 $P(1,2,3)$ 在平面 E 上，可得 $\overrightarrow{PQ}=(2,-2,-2)$．

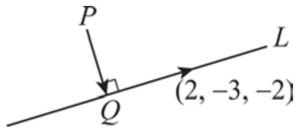
設 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ 爲 E 的法向量．因爲 $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{v}$ 均垂直，

所以由 $\begin{cases} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)\cdot(2,-2,-2)=0 \\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=(a,b,c)\cdot(2,1,-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-2b-2c=0 \\ 2a+b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ c=-3b \end{cases}$

得到法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)=(-2b,b,-3b)=-b(2,-1,3)$，即 $(2,-1,3)$ 為平面 E 的一個法向量．因為 E 通過點 $(3,0,1)$，所以 E 的方程式為 $2(x-3)-1(y-0)+3(z-1)=0$
整理得 $2x-y+3z=9$ ．

14.設直線 $L:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$，點 $P(1,1,-2)$ ．求

(1) P 點到直線 L 的垂足．　(2) P 點到直線 L 的距離．



解答　(1) $(7,3,1)$；　(2)7

解析　從點 $P(1,1,-2)$ 作直線 L 的垂線 PQ 與 L 交於 Q 點．
由直線 L 的對稱比例式可令 Q 點坐標為 $(5+2t,6-3t,3-2t)$，t 為實數．
$\overrightarrow{PQ}=(2t+4,-3t+5,-2t+5)$ ．因為 $\overrightarrow{PQ}\perp L$，所以 $\overrightarrow{PQ}$ 和 L 的方向向量 $(2,-3,-2)$ 垂直，
即 $(2t+4,-3t+5,-2t+5)\cdot(2,-3,-2)=0 \quad\Rightarrow\quad t=1$，可得 $\overrightarrow{PQ}=(6,2,3)$ ．
故(1) P 點到直線 L 的垂足 Q 點坐標為 $(7,3,1)$ ．
(2)點 P 到直線 L 的距離為 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$ ．

15.若直線 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 與 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 均落在平面 E 上，則平面 E 的方程式為何?

解答　$5x-4y-3z=10$

解析　設 $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ 為平面的法向量，則 $\overrightarrow{n}$ 與直線 L_1、L_2 的方向向量 $(1,\ 2,\ -1)$，$(2,\ 1,\ 2)$ 均垂直．故

$$\begin{cases}(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 2,\ -1)=0\\(a,\ b,\ c)\cdot(2,\ 1,\ 2)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a+2b-c=0\\2a+b+2c=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=-\dfrac{5}{3}c\\b=\dfrac{4}{3}c\end{cases}$$

得法向量 $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)=\left(-\dfrac{5}{3}c,\ \dfrac{4}{3}c,\ c\right)=-\dfrac{c}{3}(5,\ -4,\ -3)$，即 $(5,\ -4,\ -3)$ 為該平面的一個法向量．又直線 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 上一點 $(1,\ -2,\ 1)$ 為平面上一點，所以該平面的方程式為 $5(x-1)+(-4)(y-(-2))+(-3)(z-1)=0$，整理可得
$5x-4y-3z=10$ ．