高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：98.11.24
範圍	2-4 平面方程式	班級		姓名	
		座號			

一、多選題 (每題 10 分)

(　　　) 1.平面 E 的方程式爲 $x+y-z=3$ ．下列哪些敘述是正確的?

(1)點 $\left(2,1,0\right)$ 在 E 上　(2)向量 $\left(1,1,2\right)$ 爲 E 上的一個法向量　(3)原點到 E 的距離爲 $\sqrt{3}$

(4)平面 $x+y-z=-3$ 和 E 平行　(5)平面 $x+y+2z=0$ 和 E 垂直．

解答　1345

解析　(1)因爲 $2+1-0=3$，所以點 $\left(2,1,0\right)$ 在平面 E 上．

(2)因爲平面 E 上的法向量爲 $t\left(1,1,-1\right)$，所以向量 $\left(1,1,2\right)$ 不是平面 E 上的一個法向量．

(3)原點 $\left(0,0,0\right)$ 到平面 E 的距離爲 $\dfrac{\left|0+0-0-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2+\left(-1\right)^2}}=\sqrt{3}$ ．

(4)因爲平面 $x+y-z=-3$ 和平面 E 有相同的法向量，且兩平面相異，所以兩平面平行．

(5)平面 $x+y+2z=0$ 一個法向量爲 $\left(1,1,2\right)$，因爲 $\left(1,1,2\right)\perp\left(1,1,-1\right)$，所以和平面 E 垂直．

二、填充題 (每題 10 分)

1.求兩平面 $x+4y-z=3$ 和 $x-y=3$ 的夾角_________．

解答　$\dfrac{2\pi}{3}$ 與 $\dfrac{\pi}{3}$

解析　設 θ 爲平面 $x+4y-z=3$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=\left(1,4,-1\right)$ 與平面 $x-y=3$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=\left(1,-1,0\right)$

的夾角．$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1\cdot1+4\cdot\left(-1\right)+\left(-1\right)\cdot0}{\sqrt{1^2+4^2+\left(-1\right)^2}\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2+0^2}}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$，$\theta$ 爲 $\dfrac{2\pi}{3}$，

故兩平面的夾角爲 $\dfrac{2\pi}{3}$ 與 $\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ ．

2.求通過 $P\left(3,2,1\right)$ 和平面 $x-2y+3z=-4$ 平行的平面方程式__________．

解答　$x-2y+3z=2$

解析　平面 $x-2y+3z=-4$ 的一個法向量爲 $\left(1,-2,3\right)$ ．

所求平面和 $x-2y+3z=-4$ 平行，所以 $\left(1,-2,3\right)$ 亦爲此平面的一個法向量，

假設此平面的方程式爲 $x-2y+3z=d$ ．

過點 $P\left(3,2,1\right)$，所以 $d=1\cdot3+\left(-2\right)\cdot2+3\cdot1=2$，所求平面方程式爲 $x-2y+3z=2$

3.求通過 $P\left(1,-1,2\right)$，$Q\left(2,0,4\right)$，$R\left(3,2,5\right)$ 三點的平面方程式________________．

解答　$3x-y-z=2$

解析　由 P，Q，R 三點的坐標可得 $\overrightarrow{PQ}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{PR}=(2,3,3)$．

設 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ 爲平面的法向量，因爲 $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ 均垂直，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)\cdot(1,1,2)=0,\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=(a,b,c)\cdot(2,3,3)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a+b+2c=0,\cdots\cdots①\\ 2a+3b+3c=0,\cdots\cdots②\end{cases}$

將①$\times(-2)+$②得 $b-c=0$，即 $b=c$，

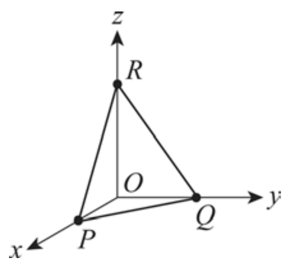
$b=c$ 代入①式得 $a=-b-2c=-c-2c=-3c$，

法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)=(-3c,c,c)=(-c)(3,-1,-1)$，即 $(3,-1,-1)$ 爲平面的一個法向量．

又平面過點 $(1,-1,2)$，平面的方程式爲 $3(x-1)+(-1)(y-(-1))+(-1)(z-2)=0$

整理得 $3x-y-z=2$．

4.求通過 $P(1,0,0)$，$Q(0,2,0)$，$R(0,0,3)$ 三點的平面方程式__________．



解答　$x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$

解析

截距式此平面方程式爲 $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$．

5.求點 $(1,2,3)$ 到平面 $2x+3y-6z=11$ 的距離________．

解答　3

解析　點到平面的距離公式，得到距離爲 $\dfrac{|2\cdot1+3\cdot2-6\cdot3-11|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\dfrac{|-21|}{7}=3$．

6.求兩平行平面 $E_1:6x-2y-3z=1$ 和 $E_2:6x-2y-3z=15$ 的距離__________．

解答　2

解析　由兩平行平面的距離公式，得平面 E_1 與 E_2 的距離爲 $\dfrac{|1-15|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}}=2$．

7.求通過點 $P(1,0,-2)$，且以 $\overrightarrow{n}=(-1,3,2)$ 爲法向量的平面方程式_____________．

解答　$x-3y-2z=5$

解析　點向式得 $(-1)(x-1)+3(y-0)+2(z-(-2))=0$，得 $x-3y-2z=5$．

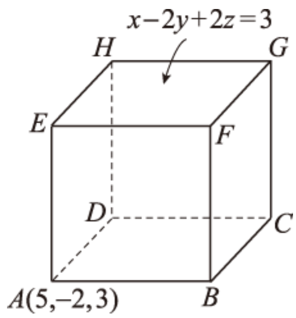
8.已知兩平行平面$E_1: 2x-2y-z=1$和$E_2: 2x-2y-z=k$的距離爲 2，求k的值________.

解答 7 或-5

解析 兩平行平面的距離公式，

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|1-k|}{3}=2 \quad \Rightarrow \quad |1-k|=6 \quad \Rightarrow \quad 1-k=\pm 6 \quad \Rightarrow \quad k=7 \text{ 或 } -5 .$$

9.在坐標空間中，有一個正立方體$ABCD-EFGH$，如下圖，它的面$EFGH$所在的平面方程式爲$x-2y+2z=3$，且A點坐標爲$(5,-2,3)$，求



(1)正立方體的面$ABCD$所在的平面方程式________________.

(2)此正立方體的邊長______________.

解答 (1) $x-2y+2z=15$;(2)4

解析 (1) $ABCD$所在的平面與$x-2y+2z=3$平行，

以假設其方程式爲$x-2y+2z=d$，包含點$(5,-2,3)$，故$5-2(-2)+2\cdot 3=15=d$，

方程式爲$x-2y+2z=15$.

(2)正立方體的邊長爲點A到平面$x-2y+2z=3$的距離，

正立方體的邊長爲$\dfrac{|5-2(-2)+2\cdot 3-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{12}{3}=4$.

10.已知點$A(-2,\ 5,\ 4)$與點$B(1,\ 4,\ -5)$在平面$E: 2x-y+2z+4=0$的兩側，且$\overline{AB}$與平面E交於P點，求$\overline{AP}:\overline{BP}$的比值__________.

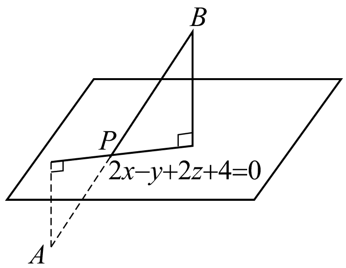
解答 $3:8$

解析

此二線段的長度比等於A，B兩點到E的距離比，如右圖所示.

故利用點到平面的距離公式得：

$$\frac{|2\times(-2)-5+2\times 4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}:\frac{|2\times 1-4+2\times(-5)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3:8 .$$



11.已知平面$x-y+2z=3$與$2x+y+cz=4$的一夾角爲60°，求c的值____________.

解答 1 或$-\dfrac{13}{5}$

解析 設平面$x-y+2z=3$與$2x+y+cz=4$的法向量$(1,\ -1,\ 2)$與$(2,\ 1,\ c)$的夾角爲θ，則

θ爲60°或120°.

因爲 $\left|\cos 60°\right| = \left|\cos 120°\right| = \dfrac{1}{2}$，所以 $\left|\dfrac{(1,\ -1,\ 2)\cdot(2,\ 1,\ c)}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\right)\left(\sqrt{2^2+1^2+c^2}\right)}\right| = \dfrac{1}{2}$，

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|1+2c\right|}{\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{5+c^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2^2 \times \left|1+2c\right|^2 = 6\times\left(5+c^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 16c^2+16c+4 = 6c^2+30$$

$$\Rightarrow \quad 10c^2+16c-26 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5c^2+8c-13 = (5c+13)(c-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad c=1 \text{或} c=-\frac{13}{5}\ .$$

12.已知坐標空間中四點 $(0,\ 0,\ 3)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 3,\ 3)$ 與 $(0,\ a,\ 0)$ 共平面，求 a 的值_____ .

解答　-3

解析

截距式，過 $(0,\ 0,\ 3)$，$(1,\ 0,\ 0)$ 與 $(0,\ a,\ 0)$ 三點的平面方程式爲 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{3}=1$，

$(1,\ 3,\ 3)$ 代入 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{3}=1$ 得 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{3}=1$，解得 $a=-3$.

13.已知坐標空間中兩點 $P(1,\ 2,\ 3)$ 與 $Q(2,\ 3,\ 2)$，求以 $\overrightarrow{PQ}$ 爲法向量且通過點 P 的平面方程式__ .

解答　$x+y-z=0$

解析　$\overrightarrow{PQ}=(1,\ 1,\ -1)$ 爲平面的一個法向量，又過點 $P(1,\ 2,\ 3)$，

故其方程式爲 $1(x-1)+1(y-2)+(-1)(z-3)=0$，即 $x+y-z=0$.

14.已知平面 E 過點 $P(2,1,-1)$ 且與二平面 $E_1: 2x+y-z=3$，$E_2: x+2y+z=0$ 均垂直，求 E 的方程式________________ .

解答　$x-y+z=0$

解析　設 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ 爲平面 E 的法向量 .

因爲平面 E 與二平面 $E_1: 2x+y-z=3$，$E_2: x+2y+z=0$ 均垂直，

所以$\begin{cases}(a,b,c)\perp(2,1,-1)\\(a,b,c)\perp(1,2,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,1,-1)=0\\(a,b,c)\cdot(1,2,1)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2a+b-c=0\\a+2b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b,\\c=-b,\end{cases}$

法向量$\overrightarrow{n}=(a,b,c)=(-b,b,-b)=(-b)(1,-1,1)$，即$(1,-1,1)$爲平面$E$的一個法向量．

過點$(2,1,-1)$，平面E的方程式爲$x-y+z=0$．

15.在坐標空間中，已知平面E通過$(2,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$三點，求

(1) E的方程式________________．(2)原點$(0,0,0)$到E的距離________________．

解答 (1)$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$;(2)$\frac{2}{3}$

解析 (1)截距式，E的方程式爲$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$．

(2)原點$(0,0,0)$到平面E的距離爲$\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$．