高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.10.06					
範圍	1-3、4 向量四則運算	班級		姓名	
		座號			

1. 設 $A(0,0)$， $B(1,3)$， $C(-1,2)$， $D(3,4)$， $t\in\boldsymbol{R}$， 則 $\left|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}\right|$ 之(1)最小值為＿＿＿＿＿＿．

   (2)又此時 $t=$＿＿＿＿＿＿．

   解答　(1) $\sqrt{5}$;(2) $-\dfrac{1}{2}$

   解析　$\overrightarrow{AB}=(1,3)$， $\overrightarrow{CD}=(4,2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}=(1+4t,3+2t)$

   $$\left|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(1+4t)^2+(3+2t)^2}=\sqrt{1+8t+16t^2+9+12t+4t^2}$$

   $$=\sqrt{20t^2+20t+10}=\sqrt{20(t+\frac{1}{2})^2+5}$$

   當 $t=-\dfrac{1}{2}$ 時， $\left|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}\right|$ 有最小值 $\sqrt{5}$

2. 若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(2,3)$ 且 $3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}=(-1,-2)$，求 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$．

   解答　$\overrightarrow{u}=(-5,-8)$， $\overrightarrow{v}=(7,11)$

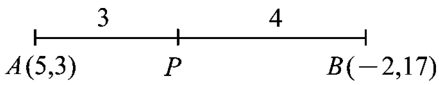
   解析　$\begin{cases}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(2,3) & \cdots\cdots① \\ 3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}=(-1,-2) & \cdots\cdots②\end{cases}$，由②－①×2 得 $\overrightarrow{u}=(-5,-8)$，代入①得 $\overrightarrow{v}=(7,11)$

3. 平面上，設 $A(5,3)$， $B(-2,17)$，若 A,B,P 共線且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:4$，試求 P 點之坐標．

   解答　內分點 $P(2,9)$，外分點 $P(26,-39)$

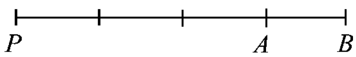
   解析　利用分點公式

   (1)內分點 $P(x,y)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=\dfrac{4\cdot5+3(-2)}{3+4}=\dfrac{14}{7}=2 \\ y=\dfrac{4\cdot3+3\cdot17}{3+4}=\dfrac{63}{7}=9\end{cases}$



   (2)外分點 $P(x,y)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}5=\dfrac{1\cdot x+3(-2)}{3+1} \\ 3=\dfrac{1\cdot y+3\cdot17}{3+1}\end{cases}$

   $\Rightarrow$ $x=26$， $y=-39$



4. 設 $A(k,5)$， $B(-3,3)$， $C(2,k-3)$ 三點共線，求 k 之值．

   解答　-4 或 7

   解析　$\overrightarrow{BA}=(k+3,2)$， $\overrightarrow{BC}=(5,k-6)$　$\because$　A,B,C 三點共線 $\Rightarrow\overrightarrow{BA}//\overrightarrow{BC}$

   $\therefore$　$\dfrac{(k+3)}{5}=\dfrac{2}{(k-6)}\Rightarrow(k+3)(k-6)=10\Rightarrow k^2-3k-28=0$　$\Rightarrow$　$k=-4$ 或 7

5. 設直線 L,M 方程式分別為 $L:\begin{cases}x=3+2t \\ y=2-t\end{cases}$， $t\in\boldsymbol{R}$， $M:\begin{cases}x=-1+t \\ y=5-t\end{cases}$， $t\in\boldsymbol{R}$，求 L 與 M 的交點坐標．

   解答　$(1,3)$

   解析　令 $M:\begin{cases}x=-1+s \\ y=5-s\end{cases}$， $s\in\boldsymbol{R}$

$\begin{cases}3+2t=-1+s\\2-t=5-s\end{cases}$，解得 $t=-1$， $s=2$，$\therefore$ $x=1$， $y=3$ $\therefore$ 交點爲 $(1,3)$

6. 坐標平面上有一平行四邊形 $ABCD$，已知 $A(2,\ -7)$， $B(-3,\ 0)$， $C(-4,\ 3)$，求 D 點的坐標.

解答 $(1,\ -4)$

解析 設 $D(x,\ y)$，平行四邊形 $ABCD$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

又 $\overrightarrow{AB}=(-5,\ 7)$， $\overrightarrow{DC}=(-4-x,\ 3-y)$，得 $(-5,\ 7)=(-4-x,\ 3-y)$，

即 $-5=-4-x$， $7=3-y$，亦即 $x=1$， $y=-4$.因此 D 點的坐標爲 $(1,\ -4)$.

7. 與 $(-6,8)$ 垂直，長爲 5 的向量是____________.

解答 $\pm(4,3)$

解析

(1)若 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，則 $\dfrac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|}$ 爲 $\overrightarrow{a}$ 同方向的單位向量

(2)與 $(-6,8)$ 垂直的向量，即與 $(8,6)$ 平行的向量

(3)$\therefore$ $\pm\dfrac{(8,6)}{10}$ 是與 $(8,6)$ 平行的單位向量，故 $\pm5\times\dfrac{(8,6)}{10}=\pm(4,3)$ 爲所求

8. 若直線 L ：$\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-3t\end{cases}$， t 爲實數，求 L 的一般式.

解答 $3x+5y=7$.

解析 由 $\begin{cases}x=-1+5t\cdots\cdots①\\y=2-3t\ \ \cdots\cdots②\end{cases}$ 中，①×3+②×5 消去 t，得 $3x+5y=7$，此式即爲 L 的方程式.

9. 設 $\overrightarrow{a}=(2,\ -4)$， $\overrightarrow{b}=(-3,\ 5)$， $\overrightarrow{c}=(6,\ -9)$，

已知 $(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})//\overrightarrow{c}$，求實數 t.

解答 $t=2$

解析 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(2,\ -4)+(-3t,\ 5t)=(2-3t,\ -4+5t)$，

當 $(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})//\overrightarrow{c}$ 時， $\dfrac{2-3t}{6}=\dfrac{-4+5t}{-9}\Rightarrow-9(2-3t)=6(-4+5t)$，得 $t=2$.

10. 設 $\overrightarrow{a}=(4,\ 1)$， $\overrightarrow{b}=(3,\ 5)$， t 爲實數，已知 $(\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，求 t 之値.

解答 $t=\dfrac{1}{2}$

解析 $\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}=(4-3t,\ 1-5t)$， $(\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=3(4-3t)+5(1-5t)=0$ 時， $t=\dfrac{1}{2}$.

11. 設 A 點的坐標 $(3,\ -2)$，且 $\overrightarrow{AB}=(-4,\ 5)$，試作下列各問題：

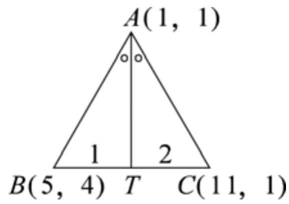
(1)求 B 點的坐標． (2)若 O 爲原點， $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$，求 P 點的坐標．

解答 (1) $(-1,\ 3)$;(2) $(-4,\ 5)$

解析 (1)設點 $B(x,\ y)$，則 $\overrightarrow{AB}=(x-3,\ y+2)=(-4,\ 5)$，得 $x=-1,\ y=3$．

(2)設點 $P(a,\ b)$，則 $\overrightarrow{OP}=(a,b)=(-4,\ 5)$，得 $a=-4,\ b=5$．

12. 設△ABC中，$A(1,\ 1)$，$B(5,\ 4)$，$C(11,\ 1)$，$\angle A$的角平分線交邊$\overline{BC}$於T，求T點的坐標，並求$\overline{AT}$的長．



解答　$2\sqrt{10}$

解析

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\overline{AC}=\sqrt{10^2+0^2}=10$，

得$\overline{BT}$：$\overline{TC}=5$：$10=1$：2，

由分點公式：$T(\dfrac{1\cdot 11+2\cdot 5}{1+2},\ \dfrac{1\cdot 1+2\cdot 4}{1+2})=(7,\ 3)$，得$\overline{AT}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$．

13. 設坐標平面上三點$A(5,\ 3)$，$B(1,\ 0)$，$C(8,\ 7)$，且$\angle BAC=\theta$，

(1)求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$．　(2)求$\cos\theta$之值．

解答　(1)-24;(2)$-\dfrac{24}{25}$

解析　(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4,\ -3)\cdot(3,\ 4)=-12-12=-24$．

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=-\dfrac{24}{5\cdot 5}=-\dfrac{24}{25}$．

14. 設兩向量$\overrightarrow{a}=(3,\ -7)$，$\overrightarrow{b}=(-4,\ 5)$，求$(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$．

解答　-54

解析

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})&=\left[2(3,\ -7)+3(-4,\ 5)\right]\cdot\left[(3,\ -7)-(-4,\ 5)\right]\\&=\left[(6-12,\ -14+15)\right]\cdot\left[(7,\ -12)\right]\\&=(-6,\ 1)\cdot(7,\ -12)=-42-12=-54\end{aligned}$$．

15. 已知兩直線L_1：$\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+5t\end{cases}$與$L_2$：$3x+y-7=0$，試作下列各問題：

(1)利用二元一次式寫出直線L_1．(2)寫出L_2的參數式．(3)求L_1與L_2的交點．

解答　(1)$5x+2y=13$;(2)$\begin{cases}x=t\\y=7-3t\end{cases}$，$t$爲實數;(3)$(1,\ 4)$

解析　(1)由L_1：$\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+5t\end{cases}$ (消去t) $\Rightarrow\begin{cases}5x=15-10t\\2y=-2+10t\end{cases}\Rightarrow 5x+2y=13$．

(2) 設$x=t$，$3t+y-7=0$，$y=7-3t\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=7-3t\end{cases}$，$t$爲實數．

(3)解$\begin{cases}3x+y=7\\5x+2y=13\end{cases}$，得$(x,\ y)=(1,\ 4)$．

16. 設$A(4,0)$，$B(0,-3)$，動點P爲直線$x+y=0$上之一點，則$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$之最小值=＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$-\dfrac{49}{8}$

解析　$A(4,0)$，$B(0,-3)$，$P\in x+y=0$ $\Rightarrow$ 令$P(t,-t)$，$t\in\boldsymbol{R}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(4-t,t)\cdot(-t,-3+t)=-t(4-t)+t(-3+t)=2t^2-7t=2(t-\frac{7}{4})^2-\frac{49}{8}$

$\therefore$ 當 $t=\frac{7}{4}$ 時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 有最小值 $-\frac{49}{8}$

17. 設平面上有三點 A，B，C，已知 $\overrightarrow{AB}=(4,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3)$，則△$ABC$ 之周長=____________.

解答　$5+\sqrt{17}+\sqrt{10}$

解析　$\overrightarrow{AB}=(4,1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{17}$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-3,-4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=5$

$\therefore$ △ABC 之周長 $=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=5+\sqrt{17}+\sqrt{10}$

18. 設 x，y 是實數，$4x-3y=5$，則 x^2+y^2 之最小值=____________.

解答　1

解析　由柯西不等式 $(4x-3y)^2\le[4^2+(-3)^2](x^2+y^2)$

$\Rightarrow 25\le 25(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2\ge 1$，即最小值 $=1$

19. 設平面上有二平行線 $L_1:2x-y-4=0$，$L_2:2x-y+6=0$ 及一點 $A(-1,4)$，則

(1) $d(L_1,L_2)=$____________.　(2) $d(A;L_1)=$____________.

解答　(1) $2\sqrt{5}$;(2) $2\sqrt{5}$

解析　(1) $L_1:2x-y-4=0$，$L_2:2x-y+6=0 \Rightarrow d(L_1,L_2)=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(2) $L_1:2x-y-4=0$，$A(-1,4) \Rightarrow d(A;L_1)=\frac{\left|-2-4-4\right|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

20. 已知 $A(-2,4)$，$B(8,9)$，$C(1,8)$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$____________.　(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上正射影=____________.

解答　(1)50;(2) $(6,8)$

解析　(1) $\overrightarrow{AB}=(10,5)$，$\overrightarrow{AC}=(3,4)$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=30+20=50$

(2)所求 $=\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{50}{25}(3,4)=(6,8)$

21. 設 $\overrightarrow{a}=(-1,2)$，$\overrightarrow{b}=(1,k)$，若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $150°$，則 k 之值=____________.

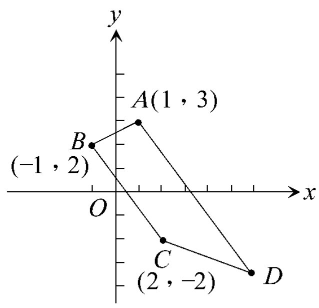
解答　$k=8-5\sqrt{3}$

解析　$\cos 150°=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1+2k}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{(-1+2k)^2}{5(1+k^2)}$

$\Rightarrow k^2-16k-11=0 \Rightarrow k=8\pm5\sqrt{3}$（正不合 $\because -1+2k<0$）

22. 梯形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD} // \overline{BC}$，$A(1,3)$，$B(-1,2)$，$C(2,-2)$，$\overline{AD}=8$，則 D 點坐標爲＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$(\frac{29}{5},-\frac{17}{5})$



解析

$\overrightarrow{BC}=(3,-4)$　$\because$　$\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}$

$\therefore$　直線 AD 的參數式爲 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-4t \end{cases}$，$t\in \boldsymbol{R}$

設 $D(1+3t,3-4t)$　$\because$　$\overline{AD}=8$，$A(1,3)$

$\therefore$　$\sqrt{(3t)^2+(-4t)^2}=8$　$\Rightarrow$　$25t^2=64$

$\Rightarrow$　$t=\pm\frac{8}{5}$（負不合　$\because$　$\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 同方向）

$t=\frac{8}{5}$ 時，$x=\frac{29}{5}$，$y=-\frac{17}{5}$　$\therefore$　$D(\frac{29}{5},-\frac{17}{5})$

23. 設直線的參數方程式分別爲 $L_1:\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-t \end{cases}$，$t\in \boldsymbol{R}$，$L_2:\begin{cases} x=-1+s \\ y=5-s \end{cases}$，$s\in \boldsymbol{R}$，求

(1) L_1 與 L_2 的交點爲＿＿＿＿＿＿＿．　(2)兩線銳夾角爲 θ，$\cos\theta=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) $(1,3)$；(2) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

解析　(1) $L_1:\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-t \end{cases}$，$t\in \boldsymbol{R}$，$L_2:\begin{cases} x=-1+s \\ y=5-s \end{cases}$，$s\in \boldsymbol{R}$

則 $\begin{cases} 3+2t=-1+s \\ 2-t=5-s \end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} 2t-s=-4\cdots\cdots① \\ -t+s=3\cdots\cdots② \end{cases}$

解①，②　$\Rightarrow$　$t=-1$，$s=2$，故 L_1 與 L_2 的交點爲 $(1,3)$

(2) $L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-1}$，$L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{-1}$

$\because$　L_1 與 L_2 的交角 θ 就是兩向量 $(2,-1)$ 與 $(1,-1)$ 的夾角

$\therefore$　$\cos\theta=\pm\frac{2\cdot 1+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$，故兩直線的銳夾角 θ，$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

24. 若 $L_1:2x-y+2=0$，$L_2:3x+y-4=0$，則 L_1 與 L_2 之夾角爲＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

解析　取 L_1 及 L_2 之法向量，分別爲 $\overrightarrow{n_1}=(2,-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(3,1)$

則 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{6-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\Rightarrow$　$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\therefore$　L_1，L_2 之夾角爲 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

25. 過點 $A(1,5)$ 而與向量 $\overrightarrow{n}=(3,-2)$ 垂直的直線方程式爲＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$3x-2y+7=0$

解析　直線 L 與 $\overrightarrow{n}=(3,-2)$ 垂直，故 $\overrightarrow{n}$ 爲 L 之法向量，設 $L:3x-2y+k=0$

$A(1,5)$ 代入 L，得 $k=7$　$\therefore$　$L:3x-2y+7=0$

26. $L:4x-3y+2=0$，求與 L 平行且距離爲 2 的直線方程式____________．（有二解）

解答　$4x-3y+12=0$ 或 $4x-3y-8=0$

解析　設所求直線 $L':4x-3y+k=0 \quad \Rightarrow \quad d(L';L)=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$\Rightarrow \quad |k-2|=10 \quad \Rightarrow \quad k-2=\pm 10 \quad \Rightarrow \quad k=12$ 或 -8

$\therefore \quad L'=4x-3y+12=0$ 或 $4x-3y-8=0$

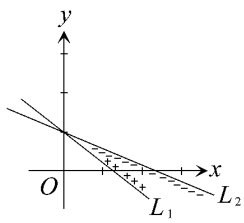
27. 二直線 $L_1:3x+4y-4=0$， $L_2:5x+12y-12=0$ 交角中，則銳角的角平分線方程式爲____________．

解答　$4x+7y-7=0$

解析　角平分線：$\dfrac{|3x+4y-4|}{5}=\dfrac{|5x+12y-12|}{13}$

由下圖可知，銳角角平分線位在 L_1， L_2 之異號區

故取 $(\dfrac{3x+4y-4}{5})=-(\dfrac{5x+12y-12}{13}) \quad \Rightarrow \quad 4x+7y-7=0$



28. 坐標平面上三點 $A(2,-1)$， $B(-1,3)$， $C(3,2)$，若直線 $2x-3y=1$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q 點，求 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=$____________．

解答　1：2

解析　$\overline{AQ}:\overline{BQ}=d(A;L):d(B;L)=\dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{4+9}}:\dfrac{|-2-9-1|}{\sqrt{4+9}}=6:12=1:2$