高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.09.22					
範圍	1-1、2 向量	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1. 設一平面上二向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，則$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角爲

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° (E) 150°

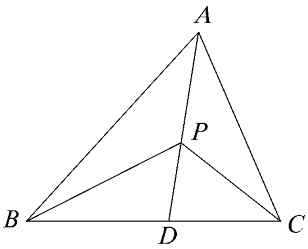
【解答】(D)

【詳解】

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \Rightarrow (\sqrt{13})^2=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2 \Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-12 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$\therefore\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha=-6 \Rightarrow 3\cdot4\cdot\cos\alpha=-6 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-1}{2}$，得$\alpha=120°$

2. 如下圖，已知$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{19}\overrightarrow{AC}$，則△$ABP$ 面積是△ACP 面積的(A)$\frac{19}{15}$ (B) 2 (C)$\frac{3}{2}$ (D)$\frac{5}{3}$ (E)$\frac{8}{5}$ 倍



【解答】(D)

【詳解】

(1)由 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{19}\overrightarrow{AC}$，$\because\ \frac{3}{19}+\frac{5}{19}<1$，$\therefore P$，$B$，$C$ 不共線

(2)如圖，令$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AP}=\frac{3t}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{5t}{19}\overrightarrow{AC}$

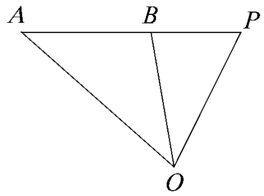
$\because\ B$，D，C 共線 $\therefore\ \frac{3t}{19}+\frac{5t}{19}=1 \Rightarrow t=\frac{19}{8}$

$\therefore\ \overrightarrow{AD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overline{BD}:\overline{DC}=5:3$

(3)$\therefore$ △ABD：△$ACD=5:3$，又△PBD：△$PCD=5:3$

$\Rightarrow$ △ABP：△$ACP=5:3=\frac{5}{3}$

3. 如下圖，已知$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則$\overrightarrow{OP}=$



(A)$\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$ (B)$\frac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{m+n}$ (C)$\frac{m\overrightarrow{OA}-n\overrightarrow{OB}}{m+n}$

(D)$\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$ (E)$\frac{n\overrightarrow{OA}-m\overrightarrow{OB}}{m-n}$

【解答】(D)

【詳解】

(1)$\overline{AB}:\overline{BP}=(m-n):n$

(2)$\therefore\ \overrightarrow{OB}=\frac{n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}}{(m-n)+n}=\frac{n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}}{m}$

$\therefore\ n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$

4. 設 $2\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC}$，$\alpha$，$\beta\in R$，若 A，B，C 共線，則 $\alpha+\beta$ 之值爲

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E)不能確定

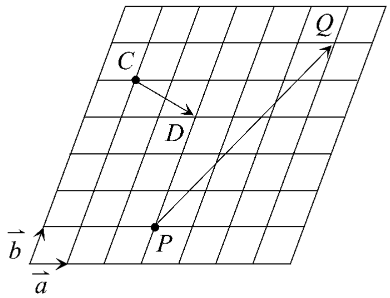
【解答】(C)

【詳解】$2\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{PA}=\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{\beta}{2}\overrightarrow{PC}$

$\because$ A，B，C 共線 $\therefore$ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=1 \Rightarrow \alpha+\beta=2$

二、多重選擇題(每題 10 分)

1. 下圖是二組兩兩平行的直線組合，且相鄰兩線等距離。已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 長度均爲 1，夾角爲 60°，則下列何者正確？



(A) $\overrightarrow{PQ}=3\vec{a}+5\vec{b}$ (B) $\overrightarrow{CD}=2\vec{a}-\vec{b}$ (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

(D) $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{7}$ (E) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{9}{2}$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(A)對 (B)對

(C)對。$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(D)錯。$|\overrightarrow{CD}|^2=|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=4+1-4\times\frac{1}{2}=3$，$\therefore$ $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$

(E)對。$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=(3\vec{a}+5\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=6+7\times\frac{1}{2}-5=\frac{9}{2}$

三、填充題(每題 10 分)

1. $|\vec{u}|=3$，$|\vec{v}|=6$，又 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 的夾角爲 120°，則 $|\vec{u}+\vec{v}|=$__________。

【解答】$3\sqrt{3}$

【詳解】$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=3^2+2(3\times 6\times\cos 120°)+6^2=27$，$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

2. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，則 $|\vec{a}-\vec{b}|=$ __________。

【解答】$\sqrt{37}$

【詳解】

(1)由 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2=13 \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=13$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13 \Rightarrow 16+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=13 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+12+9=37$ $\therefore$ $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$

3. $ABCD$ 爲平行四邊形，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$之值= __________。

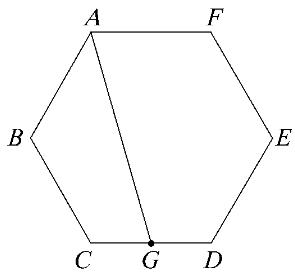
【解答】7

【詳解】

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=4^2-3^2=7$

4. 設 G 爲正六邊形 $ABCDEF$ 之一邊 $\overline{CD}$ 上之中點，若 $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AF}$ ，則$(\alpha，\beta)$ =________。

【解答】$(2，\dfrac{3}{2})$



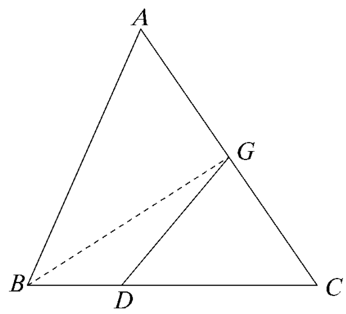
【詳解】

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}\quad=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$$

$\therefore(\alpha，\beta)=(2，\dfrac{3}{2})$

5. $\triangle ABC$ 中，D 爲 $\overline{BC}$ 上一點且 $\overline{CD}=2\overline{BD}$ ，G 爲 $\overline{AC}$ 中點，若 $\overrightarrow{GD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ ，$r，s\in R$，則數對$(r，s)=$__________。



【解答】$(\dfrac{2}{3}，-\dfrac{1}{6})$

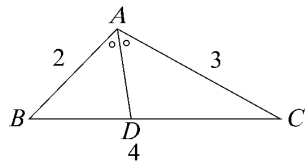
【詳解】

$$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$\therefore\quad(r，s)=(\dfrac{2}{3}，-\dfrac{1}{6})$

6. 若$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$ 且$\angle A$ 的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，求 $|\overrightarrow{AD}|$ = ________。

【解答】$\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$



【詳解】$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$

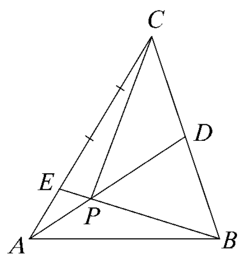
$\therefore\quad\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\quad|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{1}{25}|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|^2=\dfrac{1}{25}(9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2)$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3\times\cos A=6\times\dfrac{4+9-16}{2\times2\times3}=\dfrac{4+9-16}{2}=-\dfrac{3}{2}$

故 $|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{1}{25}[9\times4+12\times(-\dfrac{3}{2})+4\times9]=\dfrac{54}{25}$ ，即 $|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$

7. $\triangle ABC$ 中，D 爲 $\overline{BC}$ 中點，$E\in\overline{AC}$ 且 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:3$，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於點 P，若 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$ ，則數對$(x，y)=$ __________。



【解答】$(\dfrac{3}{5}，\dfrac{1}{5})$

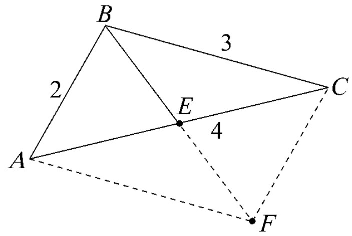
【解 1】

(1)由 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}=x(\dfrac{4}{3}\overrightarrow{CE})+y\overrightarrow{CB}$ $\quad\because E，P，B$ 共線 $\quad\therefore\dfrac{4}{3}x+y=1$

(2)由 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}=x\overrightarrow{CA}+y(2\overrightarrow{CD})$ $\quad\because\quad A，P，D$ 共線 $\quad\therefore x+2y=1$

(3)由(1)，(2)得 $x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{1}{5}$

8. 在△ABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$ 且 $\overline{BE}$ 爲 $\overline{AC}$ 上之中線，則 $\overline{BE}$ 之長爲＿＿＿＿＿。



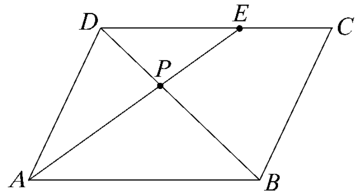
【解答】$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

【詳解】

中線定理：$\overline{BA}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BE}^2+\dfrac{1}{2}\overline{AC}^2$

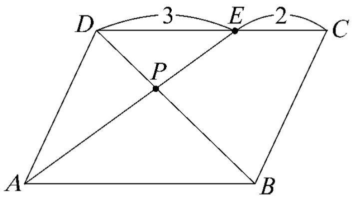
設中線 $\overline{BE}=x$，$2^2+3^2=2x^2+\dfrac{1}{2}\cdot 4^2 \Rightarrow \quad x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

9. 平行四邊形 $ABCD$ 中，E 在 $\overline{CD}$ 上，且 $3\overline{CD}=5\overline{DE}$，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 P 點，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則實數對$(x,y)=$＿＿＿＿＿。



【解答】$(\dfrac{3}{8}，\dfrac{5}{8})$

【詳解】



由 $3\overline{CD}=5\overline{DE} \Rightarrow \overline{AP}:\overline{PE}=\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{CD}:\overline{DE}=5:3$，可知 $\overline{AP}=\dfrac{5}{8}\overline{AE}$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{8}(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC})$（由分點公式）$=\dfrac{5}{8}[\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})]$

$=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AD}$， $(x，y)=(\dfrac{3}{8}，\dfrac{5}{8})$

10. O 爲△ABC 內部一點，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$|\overrightarrow{OC}|=7$，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求

(1) $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 夾角＿＿＿＿＿。　(2)△ABC 面積＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$

【詳解】

(1) O 爲△ABC 內部一點，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 O 爲重心

$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$|\overrightarrow{OC}|=7$

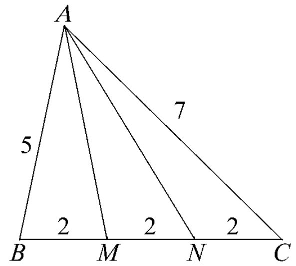
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2 \quad \Rightarrow 9+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+25=49 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{15}{2}$

又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{15}{2}=3\times 5\times\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$ 　△ABC 面積 $=3$△OAB 面積 $=3\times\dfrac{1}{2}\times 3\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$

11.於△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，M，N 在 $\overline{BC}$ 上，

且 $\overline{BM}=\overline{MN}=\overline{NC}=2$，求 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 之值=__________。



【解答】27

【詳解】

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{AC}|^2+\dfrac{5}{9}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC$

$=\dfrac{2}{9}\times5^2+\dfrac{2}{9}\times7^2+\dfrac{5}{9}\times5\times7\times\dfrac{5^2+7^2-6^2}{2\cdot5\cdot7}=\dfrac{243}{9}=27$

12.設 x，y，$z\in R$，且 A，B，C 為不共線三點，若$(x-y+2)\overrightarrow{AB}+(x+y-4)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ，則實數對$(x，y)=$__________。

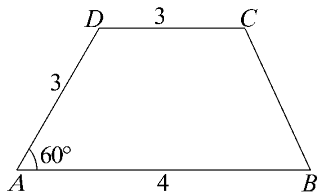
【解答】$(x，y)=(1，3)$

【詳解】$\begin{cases}x-y+2=0\\x+y-4=0\end{cases}$，解得 $x=1$，$y=3$

13.(1)如下圖：梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\,//\,\overline{DC}$ ，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=\overline{DC}=3$，

$\angle BAD=60°$， 若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$ ，試求實數對$(x，y)=$__________。

(2)承上題，$\overrightarrow{BC}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$ ，試求實數對$(r，s)=$__________。

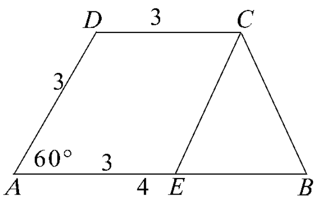


【解答】(1) $(x，y)=(\dfrac{3}{4}，1)$ (2) $(r，s)=(-\dfrac{1}{4}，1)$

【詳解】

(1)如下圖：過 C 作直線 CE，使 $\overline{CE}\,//\,\overline{DA}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$



(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$