高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.09.11					
範圍	1-1 整數(Ⅰ)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1.設 $\vec{u}$ ，$\vec{v}$ 在一平面上且不平行，若 $(x+y-3)\vec{u}+(x-y+1)\vec{v}=\vec{0}$ ，則 $x-2y$ 的值=

(A) 2 (B) 3 (C) 0 (D) -2 (E) -3

【解答】(E)

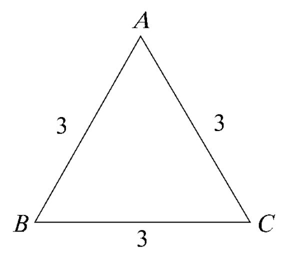
【詳解】

$(x+y-3)\vec{u}+(x-y+1)\vec{v}=\vec{0}=0\vec{u}+0\vec{v}$

$$\begin{cases}x+y-3=0\\x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\quad\therefore\quad x-2y=-3$$

2.若正三角形 ABC 的周長為 9，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值=(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$

(C) 3 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{7}{2}$



【解答】(B)

【詳解】 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=3\cdot3\cdot\cos60^\circ=\frac{9}{2}$

3.設一平面上二向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ ，若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° (E) 150°

【解答】(D)

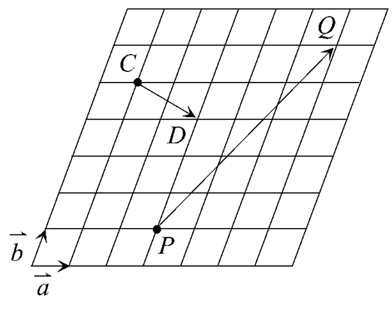
【詳解】

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\quad\Rightarrow\quad(\sqrt{13})^2=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2\Rightarrow\quad2\vec{a}\cdot\vec{b}=-12\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=$
-6

$\therefore\quad|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha=-6\quad\Rightarrow\quad3\cdot4\cdot\cos\alpha=-6\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=\frac{-1}{2}$，得 $\alpha=120^\circ$

二、多重選擇題(每題 10 分)

1. 下圖是二組兩兩平行的直線組合，且相鄰兩線等距離。已知 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 長度均為 1，夾角為 60°，則下列何者正確？



(A) $\overrightarrow{PQ}=3\vec{a}+5\vec{b}$ (B) $\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$ (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

(D) $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{7}$ (E) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{9}{2}$

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

(A)對

(B)錯。$\overrightarrow{CD}=2\vec{a}-\vec{b}$

(C)對。$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(D)錯。$|\overrightarrow{CD}|^2=|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=4+1-4\times\dfrac{1}{2}=3$

$\therefore\quad |\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$

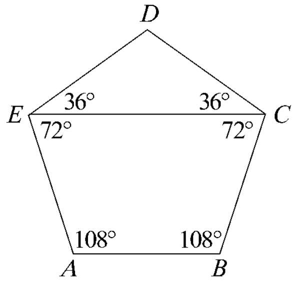
(E)對。$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=(3\vec{a}+5\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=6+7\times\dfrac{1}{2}-5=\dfrac{9}{2}$

2. $ABCDE$ 為正五邊形，那麼下列向量內積中何者最小？

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$ (E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}$

【解答】(C)(D)

【詳解】



設邊長為ℓ

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\ell\cdot\ell\cdot\cos0°>0$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\ell\cdot\ell\cdot\cos72°>0$

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\ell\cdot\ell\cdot\cos144°<0$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\ell\cdot\ell\cdot\cos144°<0$

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}=\ell\cdot\ell\cdot\cos72°>0$，由上可知(C)(D)最小

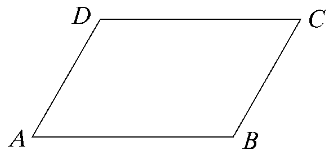
3. 就平行四邊形 $ABCD$ 而言，下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (B) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ (C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=0$

(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】



(A)如上圖，應是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

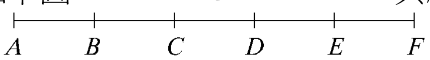
(B)$\because\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\quad\therefore\quad |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{CD}|$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$（不得寫作 0）

(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

4. 如下圖，A，B，C，D，E，F 共線且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}$ ，則下列敘述何者正確？



(A) $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AF}$ (B) $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ (C) $\overrightarrow{BE}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ (D) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{BC}$

(E) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AF}$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$ 同方向且 $5\overline{AB}=\overline{AF}\quad\therefore\quad \overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AF}$

(B) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CF}$ 同方向且 $3\overline{AB}=\overline{CF}\quad\therefore\quad \overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CF}$

(C) $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{DB}$反方向且 $2\overline{BE}=3\overline{DB}\quad\therefore\quad \overrightarrow{BE}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

(D) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$

(E) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}=3(\frac{1}{5}\overrightarrow{AF})=\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$

三、填充題(每題 10 分)

1. 設 A，B，C 表相異三點，則 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$ __________ 。

【解答】$\overrightarrow{CB}$

【詳解】由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$

2. $|\vec{u}|=3$，$|\vec{v}|=6$，又 $\vec{u}$ ，$\vec{v}$ 的夾角為 120°，則 $|\vec{u}-\vec{v}|=$__________ 。

【解答】$3\sqrt{7}$

【詳解】$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=3^2-2(3\times6\times\cos120^\circ)+6^2=63$

$\therefore$ $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

3. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ ，則 $|\vec{a}-\vec{b}|=$ __________ 。

【解答】$\sqrt{37}$

【詳解】

(1)由 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$ $\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=13$

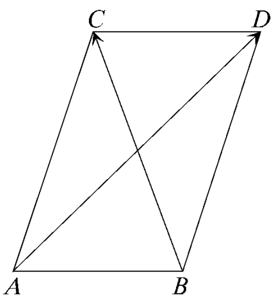
$\Rightarrow$ $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$ $\Rightarrow$ $16+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=13$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+12+9=37$ $\therefore$ $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$

4. 設△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________ 。

【解答】-6

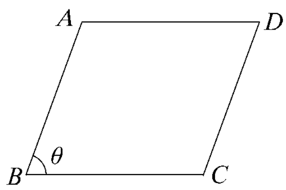
【詳解】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-[\frac{1}{2}(\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)]=-6$



5. A，B，C 三點，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，若 $ABCD$ 為平行四邊形，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________ 。

【解答】5

【詳解】$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=9-4=5$



6. 設平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=8$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=20$，則 $\overline{BC}$ 之長為__________ 。

【解答】$2\sqrt{21}$

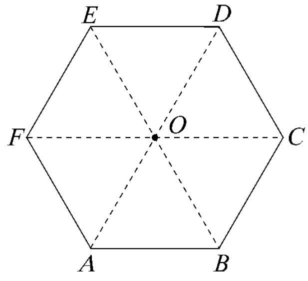
【詳解】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{BC}|^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\theta+(-8^2)+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos(180^\circ-\theta)$

$=|\overrightarrow{BC}|^2-64=20$ $\therefore$ $|\overrightarrow{BC}|^2=84$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=2\sqrt{21}$

7. 設 $ABCDEF$ 為一正六邊形，請將 $\overrightarrow{AE}$ 表成 $r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$ 的形式__________ 。

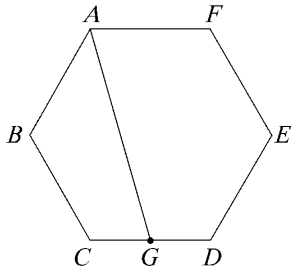


【解答】$-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$

【詳解】

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$

8. 設 G 爲正六邊形 $ABCDEF$ 之一邊 $\overline{CD}$ 上之中點，若 $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AF}$，則$(\alpha，\beta)$ =________。



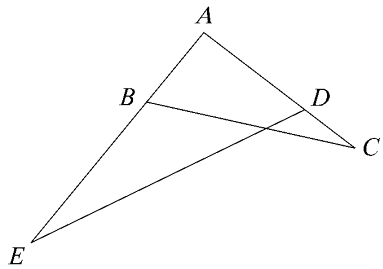
【解答】$(2，\frac{3}{2})$

【詳解】

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$　$\therefore(\alpha,\beta)=(2,\frac{3}{2})$

9. 設△ABC 中，D 是 $\overline{AC}$ 上的一點，$\overline{AD}=\frac{2}{3}\overline{AC}$，$E$ 是 $\overline{AB}$ 延長線上的一點，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$，把 $\overrightarrow{DE}$ 表成 $r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ 的形式，則數對 $(r,s)=$ 爲__________。



【解答】$(3,-\frac{2}{3})$

【詳解】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

10.設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$ 且 $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________。

【解答】$\frac{53}{4}$

【詳解】

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$

$2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}\ \Rightarrow\ 2\vec{a}+3\vec{b}=4\vec{c}\ \Rightarrow\ |2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|4\vec{c}|^2$

$\Rightarrow\ 4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=16|\vec{c}|^2\ \Rightarrow\ 16+12\vec{a}\cdot\vec{b}+81=256\ \Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{53}{4}$