3-5

例題 1

設 $f(x)$，$g(x)$ 為實係數 n 次多項式，若 $f(2-3i)=6-5i$，$g(i-2)=3+8i$，則 $f(2+3i)\times g(-i-2)=$________。

■：$\because f(2+3i)=f(\overline{2-3i})=\overline{f(2-3i)}=\overline{6-5i}=6+5i$

又 $g(-i-2)=g(\overline{i-2})=\overline{g(i-2)}=\overline{3+8i}=3-8i$

⇨ $f(2+3i)\times g(-i-2)=(6+5i)(3-8i)=18-48i+15i+40=58-33i$

例題 2

有一實係數四次方程式，其領導係數為 1，又已知方程式有兩根為 $1+2i$ 及 $2-i$，則此四次方程式為________。

■：實係數四次方程式有一根 $1+2i$，必有另一根 $1-2i$

又有一根 $2-i$，必有另一根 $2+i$

$\therefore$方程式爲 $[x-(1+2i)][x-(1-2i)][x-(2-i)][x-(2+i)]=0$

⇨ $[(x-1)-2i][(x-1)+2i][(x-2)+i][(x-2)-i]=0$

⇨ $[(x-1)^2+4][(x-2)^2+1]=0$

⇨ $(x^2-2x+5)(x^2-4x+5)=0$

⇨ $x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0$

例題 3

已知方程式 $f(x)=3x^3-4x^2+26x+20=0$ 之一根為 $1-3i$，則另二根為________。

■：$\because 1-3i$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，$\therefore 1+3i$ 亦爲 $f(x)=0$ 之一根

則 $[x-(1-3i)][x-(1+3i)]=[(x-1)+3i][(x-1)-3i]$

$=(x-1)^2+9=x^2-2x+10$ 爲 $f(x)$ 之因式

由除法知 $3x^3-4x^2+26x+20=(x^2-2x+10)(3x+2)$， $\therefore$另二根爲 $1+3i$，$-\dfrac{2}{3}$

例題 4

a，b 為實數，已知 $f(x)=x^4-4x^3+5x^2+ax+b=0$ 之一根為 $1+i$，則數對 $(a,b)=$________，又所有根為________。

■：$\because 1+i$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，$\therefore 1-i$ 亦爲 $f(x)=0$ 之一根

$\therefore [x-(1+i)][x-(1-i)]=[(x-1)-i][(x-1)+i]$

$=(x-1)^2-i^2=x^2-2x+1+1$

$=x^2-2x+2$ 爲 $f(x)$ 之因式

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-2-1 \\
\hline
1-2+2 & 1-4+5+a \qquad +b \\
 & 1-2+2 \\
\hline
 & \quad -2+3+a \\
 & \quad -2+4-4 \\
\hline
 & \qquad -1+(a+4)+b \\
 & \qquad -1+2 \qquad -2 \\
\hline
 & \qquad\qquad (a+2)+(b+2)
\end{array}
$$

整除 $\begin{cases} a+2=0 \\ b+2=0 \end{cases}$ ⇨ 數對 $(a,b)=(-2,-2)$

又 $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$

$=(x^2-2x+2)(x^2-2x-1)$

故所有根為 $1\pm i$ 及 $1\pm\sqrt{2}$

例題 5

設 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$，則 $f(x)=0$ 之四根為________ .

■：利用整係數一次因式檢驗法

設 $ax-b$ 為 $f(x)$ 之一次因式，其中 a，$b\in\mathbb{Z}$ 且 $(a,b)=1$

則 $a\mid 6$ 且 $b\mid -2$ ⇨ a 可能為 ±1，±2，±3，±6，b 可能為 ±1，±2

因此可能的一次因式為

$x+1$，$x-1$，$x+2$，$x-2$，$2x+1$，$2x-1$，

$3x+1$，$3x-1$，$3x+2$，$3x-2$，$6x+1$，$6x-1$

又 $f(1)=6+5+3-3-2=9$，$f(-1)=6-5+3+3-2=5$

以綜合除法檢查得 $f(-2)\neq0$，$f(-\frac{1}{2})=0$，$f(\frac{2}{3})=0$

$\therefore f(x)$ 的整係數一次因式為 $2x+1$ 及 $3x-2$

⇨ $f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1)=0$，方程式之四根為 $-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

例題 6

方程式 $(x^2-5x-4)(x^2-5x-6)=120$ 之解為________ .

■：$(x^2-5x-4)(x^2-5x-6)=120$

令 $x^2-5x=t$ ⇨ $(t-4)(t-6)=120$ ⇨ $t^2-10t-96=0$

⇨ $(t-16)(t+6)=0$ ⇨ $t=16$ 或 $t=-6$

當 $t=16$ ⇨ $x^2-5x=16$ ⇨ $x^2-5x-16=0$ ⇨ $x=\frac{5\pm\sqrt{25+64}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$

當 $t=-6$ ⇨ $x^2-5x=-6$ ⇨ $x^2-5x+6=0$

⇨ $(x-2)(x-3)=0$ ⇨ $x=2$ 或 3，故方程式之解為 $x=2$ 或 3 或 $\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$

例題 7

若 α，β 為方程式 $x^2-2x+3=0$ 之兩根，則：

(1) $\alpha^2+\beta^2=$________． (2) $\alpha^3+\beta^3=$________．

■：由根與係數的關係知 $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=3$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot 3=-2$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot 3\cdot 2=-10$

例題 8

若 α，β，γ 為方程式 $x^3+x^2+2x+1=0$ 之三根，則：

(1) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=$________． (2) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=$________．

■：由根與係數的關係知

$\alpha+\beta+\gamma=-1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$，$\alpha\beta\gamma=-1$

(1) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

$=(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)(1+\gamma)$

$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=1+(-1)+2+(-1)=1$

(2) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=-1$

例題 9

設三次方程式 $x^3-17x^2+32x-30=0$ 有兩複數根 $a+i$，$1+bi$，其中 a，b 是不為 0 的實數，則方程式的實根為________．

■：∵共軛複數成對，∴兩虛根爲 $1\pm i$，亦即 $a=1$，$b=-1$

設實根爲 α ⇨ $\alpha+(1+i)+(1-i)=17$ ⇨ $\alpha=15$，故所求實根爲 15

例題 10

設 a 為實數，令 α，β 為二次方程式 $x^2+ax+(a-2)=0$ 的兩個根，則當 $a=$____時，$|\alpha-\beta|$ 有最小值為________．

■：由根與係數的關係知 $\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=a-2$

又 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-a)^2-4(a-2)$

$=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

故當 $a=2$ 時，$|\alpha-\beta|^2$ 有最小値爲 4，亦即 $|\alpha-\beta|$ 有最小値爲 2

例題 11

設 k 為實數，若方程式 $x^3-9x^2+2x+4k=0$ 之三根成等差數列，則：

(1) $k=$________. (2) 方程式之三根為________.

■：(1) 設三根爲 $a-d$，a，$a+d$

三根和 $=(a-d)+a+(a+d)=9$ ⇨ $3a=9$ ⇨ $a=3$

$\therefore x^3-9x^2+2x+4k=0$ 有一根爲 3

代入得 $27-81+6+4k=0$ ⇨ $4k=48$ ⇨ $k=12$

(2) 由 $x^3-9x^2+2x+48=(x-3)(x^2-6x-16)=(x-3)(x+2)(x-8)=0$

三根爲 -2，3，8

例題 12

設 k 為實數，若方程式 $2x^3-kx^2+7x-2=0$ 之三根成等比數列，則：

(1) $k=$________.　(2) 方程式之三根為________.

■：(1) 設三根爲 $\dfrac{a}{r}$，a，ar

三根積 $=\dfrac{a}{r}\cdot a\cdot a=1$ ⇨ $a^3=1$ ⇨ $a=1$

$\therefore 2x^3-kx^2+7x-2=0$ 有一根爲 1　代入得 $2-k+7-2=0$ ⇨ $k=7$

(2) 由 $2x^3-7x^2+7x-2=(x-1)(2x^2-5x+2)=(x-1)(x-2)(2x-1)=0$

三根爲 $\dfrac{1}{2}$，1，2

例題 13

設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，已知 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(5)=5$，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？

(A) $(-\infty, 0)$　(B) $(0, 1)$　(C) $(1, 2)$　(D) $(2, 5)$　(E) $(5, \infty)$.

■：設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$$\therefore \begin{cases} f(1)=a+b+c+1=1 \\ f(2)=4a+2b+c+8=2 \\ f(5)=25a+5b+c+125=5 \end{cases} ⇨ \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-6 \\ 25a+5b+c=-120 \end{cases}$$

解之得 $a=-8$，$b=18$，$c=-10$ ⇨ $f(x)=x^3-8x^2+18x-10$

由

x	$\cdots$	0	1	2	3	5	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$

知 $f(x)=0$ 在 $(0, 1)$，$(2, 3)$，$(3, 5)$ 必有實根，故選(B)(D)

例題 14

若方程式 $x^4+ax^3+2x^2-3x-2a=0$ 在 1 與 2 及 -1 與 -2 之間都恰有一實根，則實數 a 之範圍為________．

■：由勘根定理知

在 1 與 2 之間恰有一實根 $f(1)f(2)<0$

⇨ $(1+a+2-3-2a)(16+8a+8-6-2a)<0$

⇨ $(-a)(6a+18)<0$ ⇨ $a(a+3)>0$

⇨ $a>0$ 或 $a<-3$..............①

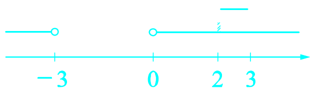
又在 -1 與 -2 之間都恰有一實根 $f(-1)f(-2)<0$

⇨ $(1-a+2+3-2a)(16-8a+8+6-2a)<0$

⇨ $(-3a+6)(-10a+30)<0$ ⇨ $(a-2)(a-3)<0$

⇨ $2<a<3$......................②

由①、②知 $2<a<3$



3-6

例題 1

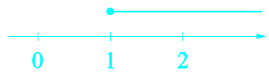
試解下列各不等式，並在數線上圖示其解。

(1) $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-6}{2}\leqq 2x$。　　　　(2) $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2x-1}{6}>\dfrac{3x+7}{2}-\dfrac{5}{2}$。

■：(1) $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-6}{2}\leqq 2x$

去分母，兩邊同時乘以 4 得 $(x-3)-2(x-6)\leqq 8x$

⇨ $x-3-2x+12\leqq 8x$ ⇨ $8x+x\geqq 9$ ⇨ $x\geqq 1$

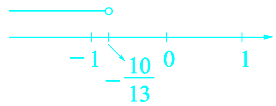


(2) $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2x-1}{6}>\dfrac{3x+7}{2}-\dfrac{5}{2}$

去分母，兩邊同時乘以 12 得 $9x-2(2x-1)>6(3x+7)-30$

⇨ $9x-4x+2>18x+42-30$ ⇨ $18x-9x+4x<2-42+30$

⇨ $13x<-10$ ⇨ $x<-\dfrac{10}{13}$



例題 2

某遊樂區門票每張 250 元，但團體票 50 張以上可以打八折，100 張以上可以打七折。設有一旅遊團人數不超過 100 人，問人數是________人以上時，購買 100 張團體票反而比較便宜。

■：設旅遊團有 x 人

若購買 x 張八折的團體票，共需 $250\cdot x\cdot\dfrac{8}{10}=200x$ 元

若購買 100 張七折的團體票，共需 $250\cdot 100\cdot\dfrac{7}{10}=17500$ 元

由題意知 $200x>17500$ ⇨ $x>87.5$　　又 x 為整數　$\therefore 88\leqq x\leqq 100$

故人數是 88 人以上時，購買 100 張團體票比較便宜

例題 3

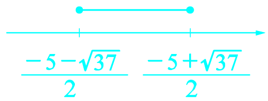
試解下列各一元二次不等式，並在數線上圖示其解。

(1) $6x^2-5x-6>0$。　　　　(2) $x^2+5x-3\leqq 0$。

■：(1) $6x^2-5x-6>0$ ⇨ $(2x-3)(3x+2)>0$

⇨ $x>\dfrac{3}{2}$ 或 $x<-\dfrac{2}{3}$

(2) 令 $x^2+5x-3=0$ ⇨ $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+12}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$



$\therefore x^2+5x-3\leqq 0$ 之解爲 $\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$

例題 4

試解下列各一元二次不等式：

(1) $x^2+6x+9\geqq 0$． (2) $x^2-10x+25>0$．

(3) $4x^2+20x+25\leqq 0$． (4) $x^2+18x+81<0$．

■：(1) $x^2+6x+9\geqq 0$ ⇨ $(x+3)^2\geqq 0$ ⇨ x 爲所有實數

(2) $x^2-10x+25>0$ ⇨ $(x-5)^2>0$ ⇨ x 爲所有實數，但 $x\neq 5$

(3) $4x^2+20x+25\leqq 0$ ⇨ $(2x+5)^2\leqq 0$ ⇨ $x=-\dfrac{5}{2}$

(4) $x^2+18x+81<0$ ⇨ $(x+9)^2<0$ ⇨ x 無解

例題 5

試解下列各一元二次不等式：

(1) $x^2-2x+4\geqq 0$． (2) $-4x^2+3x-2>0$．

■：(1) $x^2-2x+4\geqq 0$ ⇨ $(x-1)^2+3\geqq 0$ ⇨ x 爲所有實數

(2) $-4x^2+3x-2>0$ ⇨ $4x^2-3x+2<0$ ⇨ $4(x-\dfrac{3}{8})^2+\dfrac{23}{16}<0$ ⇨ x 無解

例題 6

設 a，b 為實數，若一元二次不等式 $ax^2+bx+3\geqq 0$ 之解為 $-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$，則數對 $(a, b)=$________．

■：$-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ ⇨ $(x+\dfrac{1}{3})(x-\dfrac{3}{2})\leqq 0$

⇨ $x^2-\dfrac{7}{6}x-\dfrac{1}{2}\leqq 0$ ⇨ $6x^2-7x-3\leqq 0$

⇨ $-6x^2+7x+3\geqq 0$ 與 $ax^2+bx+3\geqq 0$ 有相同解 ⇨ $a=-6$，$b=7$

故數對 $(a, b)=(-6, 7)$

例題 7

設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解為 $x>9$ 或 $x<-3$，則 $f(-3x)<0$ 之解為________．

■：$\because f(x)>0$ 之解爲 $x>9$ 或 $x<-3$

⇨ $(x-9)(x+3)>0$ ⇨ $x^2-6x-27>0$

令 $f(x)=k(x^2-6x-27)$，其中 $k>0$

⇨ $f(-3x)=k[(-3x)^2-6(-3x)-27]<0$

$\because k>0$ ⇨ $9x^2+18x-27<0$

⇨ $x^2+2x-3<0$ ⇨ $(x+3)(x-1)<0$ ⇨ $-3<x<1$

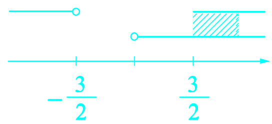
例題 8

設二次函數 $f(x)=ax^2+3x+a>0$ 恆成立，則實數 a 之範圍為________。

■：$\because ax^2+3x+a>0$ 恆成立　$\therefore a>0$……………①

且 $D=3^2-4\cdot a\cdot a<0$ ⇨ $9-4a^2<0$

⇨ $4a^2>9$ ⇨ $a>\frac{3}{2}$ 或 $a<-\frac{3}{2}$ ………………②



由①、②得 $a>\frac{3}{2}$

例題 9

若二次不等式 $x^2+(a-1)x+(a-1)<0$ 無解，則實數 a 之範圍為________。

■：$\because x^2+(a-1)x+(a-1)<0$ 無解

$\therefore x^2+(a-1)x+(a-1)\geqq 0$ 恆成立

⇨ $D=(a-1)^2-4\cdot 1\cdot(a-1)\leqq 0$

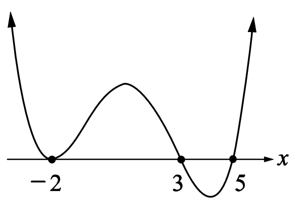
⇨ $(a-1)(a-1-4)\leqq 0$

⇨ $(a-1)(a-5)\leqq 0$

⇨ $1\leqq a\leqq 5$

例題 10

$y=f(x)$ 的函數圖形如右，則：



(1) 方程式 $f(x)=0$ 的解為________。

(2) 不等式 $f(x)>0$ 的解為________。

(3) 不等式 $f(x)\geqq 0$ 的解為________。

(4) 不等式 $f(x)<0$ 的解為________。

(5) 不等式 $f(x)\leqq 0$ 的解為________。

■：(1) $x=-2$ 或 3 或 5

(2) $x<-2$ 或 $-2<x<3$ 或 $x>5$

(3) $x\leqq 3$ 或 $x\geqq 5$

(4) $3<x<5$

(5) $x=-2$ 或 $3\leqq x\leqq 5$

例題 11

試解下列各不等式：

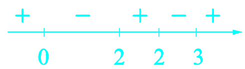
(1) $(x-1)(x+2)(x+3)>0$。

(2) $x(x-2)^2(x-3)(x^2+2x+7)<0$。

(3) $(x+1)^{101}(x-2)^{102}(x-5)^{103}\geqq 0$。

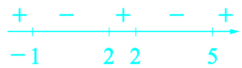
■：(1) $(x-1)(x+2)(x+3)>0$ ， 其解爲 $-3<x<-2$ 或 $x>1$

(2) $\because x^2+2x+7=(x+1)^2+6>0$ 恆成立



$\therefore x(x-2)^2(x-3)(x^2+2x+7)<0$ 之解與

$x(x-2)^2(x-3)<0$ 之解相同，故其解爲 $0<x<2$ 或 $2<x<3$



(3) $(x+1)^{101}(x-2)^{102}(x-5)^{103}\geqq 0$ 之解與

$(x+1)(x-2)^2(x-5)\geqq 0$ 之解相同，故其解爲 $x\leqq -1$ 或 $x=2$ 或 $x\geqq 5$

例題 12

解不等式：$-6x^3+13x^2-2x-5\geqq 0$。

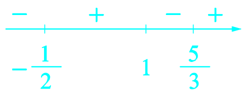
■：$-6x^3+13x^2-2x-5\geqq 0$

⇨ $6x^3-13x^2+2x+5\leqq 0$

⇨ $(x-1)(6x^2-7x-5)\leqq 0$

⇨ $(x-1)(2x+1)(3x-5)\leqq 0$

故其解爲 $x\leqq -\dfrac{1}{2}$ 或 $1\leqq x\leqq \dfrac{5}{3}$

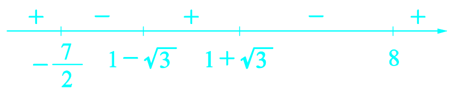


例題 13

不等式 $(x^2-2x-2)(2x+7)(x-8)\leqq 0$ 有________個整數解。

■：$\because (x^2-2x-2)(2x+7)(x-8)=0$ 之解爲 $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, $-\dfrac{7}{2}$, 8

$\therefore (x^2-2x-2)(2x+7)(x-8)\leqq 0$ 之解爲



$-\dfrac{7}{2}\leqq x\leqq 1-\sqrt{3}$ 或 $1+\sqrt{3}\leqq x\leqq 8$

⇨整數解爲 -3，-2，-1，3，4，5，6，7，8，故共有 9 個整數解

CHAP 3

1. 設 $f(x)=ax^5+4x^4+2x^3-x^2+3$，$g(x)=3x^5-bx^4+x^2-2x-4$．

若 $\deg[f(x)+g(x)]=3$，則數對 $(a,b)=$________．

■：$f(x)+g(x)$

$=(ax^5+4x^4+2x^3-x^2+3)+(3x^5-bx^4+x^2-2x-4)$

$=(a+3)x^5+(4-b)x^4+2x^3-2x-1$

$\because \deg[f(x)+g(x)]=3$

$\therefore a+3=0$ 且 $4-b=0 \Rightarrow a=-3$，$b=4$，故數對 $(a,b)=(-3,4)$

2. 若 $2x^4+3x^3-x^2+7x+a$ 能被 x^2+2x+b 整除，則數對 $(a,b)=$________．

■：

$$\begin{array}{r|llll}
 & 2 & -1 & +k & \\
\hline
1+2+b & 2+3- & 1 & +7 & +a \\
 & 2+4+2b & & & \\
\hline
 & & -1+(-1-2b)+7 & & \\
 & & -1-2 & -b & \\
\hline
 & & & (1-2b)+(7+b)+a & \\
 & & & k \quad +2k & +bk \\
\hline
 & & & 0 \quad +0 & +0
\end{array}$$

整除 $\Rightarrow \dfrac{-2b+1}{1}=\dfrac{7+b}{2}=\dfrac{a}{b}=k$

$\Rightarrow \begin{cases} 7+b=2(-2b+1) \\ a=b(-2b+1) \end{cases}$

$\Rightarrow b=-1$，$a=-3$，

故數對 $(a,b)=(-3,-1)$

3. 設整係數多項式 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2kx-2$ 有整係數一次因式，則 $k=$________．

■：由整係數一次因式檢驗法知

$f(x)$ 之所有可能整係數一次因式爲 $x-1$，$x+1$，$x-2$，$x+2$

(1) 若 $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因式，則 $f(1)=1-1+k-2k-2=0$

$\Rightarrow k=-2$

(2) 若 $x+1$ 爲 $f(x)$ 之因式，則 $f(-1)=1+1+k+2k-2=0$

$\Rightarrow k=0$

(3) 若 $x-2$ 爲 $f(x)$ 之因式，則 $f(2)=16-8+4k-4k-2=0$

$\Rightarrow k$ 無解

(4) 若 $x+2$ 爲 $f(x)$ 之因式，則 $f(-2)=16+8+4k+4k-2=0$

$\Rightarrow k=-\dfrac{11}{4}$（不合）

故 $k=-2$ 或 0

4. 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $f(x)$ 與 $xf(x)$ 除以 x^2+kx+1，所得的餘式分別為 $x+1$ 與 $-2x-1$，則 $k=$________。

■：∵ $f(x)$ 除以 x^2+kx+1 之餘式爲 $x+1$

∴令 $f(x)=(x^2+kx+1)Q(x)+(x+1)$

⇨ $xf(x)=x\cdot(x^2+kx+1)Q(x)+(x^2+x)$

$=x\cdot(x^2+kx+1)Q(x)+1\cdot(x^2+kx+1)+[(1-k)x-1]$

$=(x^2+kx+1)[xQ(x)+1]+[(1-k)x-1]$

又 $xf(x)$ 除以 x^2+kx+1 之餘式爲 $-2x-1$

∴ $1-k=-2$ ⇨ $k=3$

5. 若 $f(x)=x^3+5x^2+11x+10$ 與 $g(x)=x^4+3x^3+6x^2+ax+5$ 之最高公因式為二次式，則整數 $a=$________。

■：$f(x)=x^3+5x^2+11x+10=(x+2)(x^2+3x+5)$

又 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式爲二次式

∴最高公因式爲 x^2+3x+5，亦即 $g(x)$ 含有因式 x^2+3x+5

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+0+1 \\
\hline
1+3+5\,) & 1+3+6+a+5 \\
 & 1+3+5 \\
\hline
 & \quad\quad 1+a+5 \\
 & \quad\quad 1+3+5 \\
\hline
 & \quad\quad\quad (a-3)+0
\end{array}
$$

整除⇒ $a-3=0$ ⇨ $a=3$

6. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中 $1\leqq t\leqq 10$，則這段時間內該地區的最大溫差為 (A) 9 (B) 16 (C) 20 (D) 25 (E) 36。

■：$f(t)=-t^2+10t+11=-(t-5)^2+36$

又 $1\leqq t\leqq 10$

⇨當 $t=5$ 時，$f(t)$ 有最大值爲 36

當 $t=10$ 時，$f(t)$ 有最小值爲 11

亦即最大溫差爲 $36-11=25$

7. 設 k 為一整數。若方程式 $kx^2+7x+1=0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k=$________。

■：設方程式 $kx^2+7x+1=0$ 的兩根爲 α，β

由根與係數的關係知 $\alpha\beta=\dfrac{1}{k}$

由題意知 $\dfrac{5}{71}<\dfrac{1}{k}<\dfrac{6}{71}$ ⇨ $\dfrac{71}{5}>k>\dfrac{71}{6}$

又 k 爲整數　∴$k=12$，13，14……………①

∵α，β 爲兩個相異實根

∴k 要滿足 $D=7^2-4\cdot k\cdot 1>0$ ⇨ $4k<49$ ⇨ $k<\dfrac{49}{4}$ ………………………②

由①、②知 $k=12$

8. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。試問下列哪些敘述是正確的？ (A) $f(1-i)=0$ (B) $f(2+i)\neq 0$ (C)沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$ (D)沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$ (E)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$。

■：(A)(B) ○：∵$1+i$ 爲三次實係數方程式 $f(x)=0$ 之一解

∴$1-i$ 亦爲 $f(x)=0$ 之一解，且第三根爲實數

故 $f(1-i)=0$ 且 $f(2+i)\neq 0$

(C) ╳：∵$f(x)-x=0$ 爲三次實係數方程式必有實根

∴存在實數 x，滿足 $f(x)=x$

(D) ╳：∵$f(x^3)=0$ 爲九次實係數方程式必有實根

∴存在實數 x，滿足 $f(x^3)=0$

(E) ○：∵$f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，故第三根必落在 0 與 2 之間 ⇨ $f(4)<0$

9. 若二次函數 $y=f(x)=x^2-2kx+3k$ 的圖形恆在直線 $y=-4$ 的上方，則實數 k 的範圍為________。

■：∵$y=x^2-2kx+3k$ 之圖形恆在 $y=-4$ 的上方

∴$x^2-2kx+3k>-4$ 恆成立

⇨ $x^2-2kx+(3k+4)>0$ 恆成立

⇨ $D=(2k)^2-4(3k+4)<0$

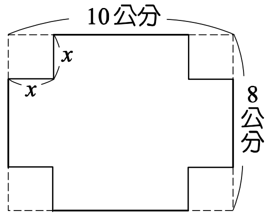
⇨ $4k^2-12k-16<0$

⇨ $k^2-3k-4<0$

⇨ $(k-4)(k+1)<0$

⇨ $-1<k<4$

10. 把一無蓋容器打開，平鋪於地上如右圖所示，欲使其容積至少為 48 立方公分，則 x 之範圍為________。



[redacted]：容器長、寬、高分別爲 $10-2x$，$8-2x$，x 且均大於 0

$\therefore 10-2x>0$，$8-2x>0$，$x>0$

⇨ $0<x<4$ ……………………①

容積$=(10-2x)(8-2x)\cdot x\geqq 48$

⇨ $(5-x)(4-x)x\geqq 12$

⇨ $(x^2-9x+20)x\geqq 12$

⇨ $x^3-9x^2+20x-12\geqq 0$

⇨ $(x-1)(x^2-8x+12)\geqq 0$

⇨ $(x-1)(x-2)(x-6)\geqq 0$

⇨ $1\leqq x\leqq 2$ 或 $x\geqq 6$……………②

取①、②之交集得 $1\leqq x\leqq 2$

故 x 之範圍爲 $1\leqq x\leqq 2$