3-1

例題 1

下列哪些式子為 x 的多項式？　(A) $\sqrt{5}x^2+\sqrt{7}x+\frac{1}{3}$　(B) $\frac{3x+1}{x-2}$　(C) $x^2-3|x|$

(D) $\sqrt{3x^2+2x-1}$　(E) $\frac{3}{5}x$．

■：多項式中的變數 x，
不能在根號裡，也不能在分母，也不能在絕對值中，故選(A)(E)

例題 2

設 a，b，c 都是整數，若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$ 且 $5|a|+4|b-1|+|c+3|=1$，則 $\deg f(x)=$________．

■：$\because 5|a|+4|b-1|+|c+3|=1$ 且 a，b，c 都是整數
$\therefore |a|=0$，$|b-1|=0$，$|c+3|=1$
⇨ $a=0$，$b=1$，$c=-4$ 或 -2　　故 $\deg f(x)=2$

例題 3

設 $f(x)=(a+3)x^2+(b-1)x+(c-2)$，$g(x)=2x^2-3x+1$ 為兩多項式，若 $f(x)=g(x)$，則序組 $(a,b,c)=$________．

■：由多項式相等可知
$a+3=2$，$b-1=-3$，$c-2=1$
⇨ $a=-1$，$b=-2$，$c=3$
故序組 $(a,b,c)=(-1,-2,3)$

例題 4

設 $f(x)=2x^2+3x-1$，$g(x)=x^2-x+2$，則：

(1) $2f(x)+3g(x)=$________．

(2) $f(x)-2g(x)=$________．

(3) $f(x)\cdot g(x)=$________．

■：(1) $2f(x)+3g(x)=2(2x^2+3x-1)+3(x^2-x+2)$
$=4x^2+6x-2+3x^2-3x+6=7x^2+3x+4$

(2) $f(x)-2g(x)=(2x^2+3x-1)-2(x^2-x+2)$
$=2x^2+3x-1-2x^2+2x-4=5x-5$

(3) $f(x)\cdot g(x)=(2x^2+3x-1)(x^2-x+2)$
$=2x^4-2x^3+4x^2+3x^3-3x^2+6x-x^2+x-2=2x^4+x^3+7x-2$

例題 5

已知兩多項式

$P(x)=20+19x+18x^2+\cdots\cdots+x^{19}$，$Q(x)=20x^{19}+19x^{18}+18x^{17}+\cdots\cdots+2x+1$，

求 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 的乘積中

(1) x^{19} 項的係數為________。

(2) 所有項的係數和為________。

■：$P(x)Q(x)=(20+19x+18x^2+\cdots\cdots+x^{19})(20x^{19}+19x^{18}+18x^{17}+\cdots\cdots+2x+1)$

(1) 乘積中 x^{19} 項的係數爲$20^2+19^2+18^2+\cdots\cdots+1^2=\sum_{k=1}^{20}k^2=\dfrac{20\times21\times41}{6}=2870$

(2) 乘積中所有項的係數和爲

$P(1)Q(1)=(20+19+18+\cdots\cdots+1)(20+19+18+\cdots\cdots+1)$

$=\dfrac{20\times21}{2}\times\dfrac{20\times21}{2}=44100$

例題 6

試利用長除法求下列各題的商式與餘式：

(1) $4x^4-5x^2-6x+3$ 除以 $2x+1$。

(2) $2x^4+x^3-4x^2+7$ 除以 $2x^2-x+1$。

■：(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2-1-2-2 \\
2+1 & 4+0-5-6+3 \\
 & 4+2 \\ \hline
 & \quad -2-5 \\
 & \quad -2-1 \\ \hline
 & \qquad -4-6 \\
 & \qquad -4-2 \\ \hline
 & \qquad\quad -4+3 \\
 & \qquad\quad -4-2 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

故商式爲 $2x^3-x^2-2x-2$，餘式爲 5

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+1-2 \\
2-1+1 & 2+1-4+0+7 \\
 & 2-1+1 \\ \hline
 & \quad 2-5+0 \\
 & \quad 2-1+1 \\ \hline
 & \qquad -4-1+7 \\
 & \qquad -4+2-2 \\ \hline
 & \qquad\quad -3+9
\end{array}
$$

故商式爲 x^2+x-2，餘式爲$-3x+9$

例題 7

若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則數對（p，q）＝________．

■：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+0-1+(p+1) \\
\hline
1+1+2 & 1+1+1+p+2+q \\
 & 1+1+2 \\
\hline
 & \quad -1+p+2 \\
 & \quad -1-1-2 \\
\hline
 & \qquad (p+1)+4+q \cdots\cdots (*) \\
 & \qquad (p+1)+(p+1)+2p+2 \\
\hline
 & \qquad\qquad (-p+3)+(-2p+q-2)
\end{array}
$$

∵整除　∴ $\begin{cases}-p+3=0\\-2p+q-2=0\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}p=3\\q=8\end{cases}$　故數對（p，q）＝（3，8）

例題 8

設 $f(x)=x^4-2x^2+3x-5$，求 $f(1+\sqrt{3})=$________．

■：令 $x=1+\sqrt{3}$ ⇨ $x-1=\sqrt{3}$

平方得 $x^2-2x+1=3$ ⇨ $x^2-2x-2=0$

由長除法知

$f(x)=(x^2-2x-2)(x^2+2x+4)+15x+3$

⇨ $f(1+\sqrt{3})=15(1+\sqrt{3})+3$

$=15+15\sqrt{3}+3=18+15\sqrt{3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+2+4 \\
\hline
1-2-2 & 1+0-2+3-5 \\
 & 1-2-2 \\
\hline
 & \quad 2+0+3 \\
 & \quad 2-4-4 \\
\hline
 & \qquad 4+7-5 \\
 & \qquad 4-8-8 \\
\hline
 & \qquad\quad 15+3
\end{array}
$$

例題 9

試利用綜合除法，求下列各題的商式與餘式：，

(1) $x^4+x^3+4x^2+5x$ 除以 $x+2$．

(2) $9x^3-12x^2+7x-8$ 除以 $3x-2$．

■：(1)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & +1 & +4 & +5 & +0 & -2 \\
 & -2 & +2 & -12 & +14 & \\
\hline
1 & -1 & +6 & -7 & ,+14 &
\end{array}
$$

故商式爲 x^3-x^2+6x-7，餘式爲 14

(2)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 9 & -12 & +7 & -8 & \frac{2}{3} \\
 & & +6 & -4 & +2 & \\
\hline
3 & 9 & -6 & +3 & ,-6 & \\
 & 3 & -2 & +1 & &
\end{array}
$$

故商式爲 $3x^2-2x+1$，餘式爲 -6

例題 10

設 $f(x)=x^3-8x^2+25x-32$：

3—1

翰林用心 教師用 精益求精

(1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-3)$ 的多項式，即 $f(x)=a(x-3)^3+b(x-3)^2+c(x-3)+d$，則序組 $(a, b, c, d)=$________。

(2) 以 $(x-3)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式為________。

(3) 求 $f(2.99)$ 的近似值為________。（四捨五入取小數點後二位數字）

(4) 求 $f(3+i)=$________。

■：(1) $\because f(x)=(x-3)^3+(x-3)^2+4(x-3)-2$

$\therefore$序組 $(a, b, c, d)=(1, 1, 4, -2)$

1	-8	$+25$	-32	3
	$+3$	-15	$+30$	
1	-5	$+10$	, -2	
	$+3$	-6		
1	-2	, $+4$		
	$+3$			
1	, $+1$			

(2) $\because f(x)=(x-3)^2[(x-3)+1]+4(x-3)-2$

$\therefore$以 $(x-3)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式爲

$4(x-3)-2=4x-14$

(3) $f(2.99)$

$=-2+4\times(-0.01)+(-0.01)^2+(-0.01)^3$

$\approx-2-0.04=-2.04$

(4) $f(3+i)=i^3+i^2+4i-2$

$=-i-1+4i-2$

$=3i-3$

3-2

例題 1

(1) 設 $f(x)=x^{2008}+ax^{97}+7x-8$ 除以 $x+1$ 之餘式為 6，則 $a=$________．

(2) 若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 之餘式為 ________．

■：(1) 由題意知 $f(-1)=6$

⇨ $f(-1)=(-1)^{2008}+a\times(-1)^{97}+7\times(-1)-8=6$

⇨ $1-a-7-8=6$ ⇨ $a=-20$

(2) $\because f(2)=2^3-2\times2^2-2+5=3$

⇨ $g(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式爲 $g(2)=f(f(2))=f(3)=3^3-2\times3^2-3+5=11$

故 $g(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式爲 11

例題 2

設 $f(x)=x^5-6x^4-20x^3+30x^2+10x+56$，求 $f(8)=$________．

■：欲求 $f(8)$，即求 $f(x)$ 除以 $x-8$ 之餘式

由綜合除法知 $f(x)$ 除以 $x-8$ 之餘式爲 8

故 $f(8)=8$

1	−6	−20	+30	+10	+56	8
	+8	+16	−32	−16	−48	
1	+2	−4	−2	−6	，+8	

例題 3

試求 $3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^5-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)^4+5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3+3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+7\times\left(-\frac{2}{3}\right)+16$

$=$________．

■：設 $f(x)=3x^5-4x^4+5x^3+3x^2+7x+16$

由餘式定理知，原題即爲求 $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

利用綜合除法知 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=10$

故原式 $=10$

	3	−4	+5	+3	+7	+16	$-\frac{2}{3}$
		−2	+4	−6	+2	−6	
3	3	−6	+9	−3	+9	，+10	
	1	−2	+3	−1	+3		

例題 4

設 x^2+3x+2 為 $f(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+10$ 之因式，則數對 $(a,b)=$________．

■：$\because x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ 爲 $f(x)$ 之因式

$\therefore f(-1)=1-1+a-b+10=0$ ⇨ $a-b=-10$

$f(-2)=16-8+4a-2b+10=0$ ⇨ $4a-2b=-18$

解之得 $a=1$，$b=11$

故數對 $(a,b)=(1,11)$

例題 5

設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(-1)=f(2)=f(4)=3$ 且 $f(1)=15$，則多項式 $f(x)=$________。

■：令 $f(x)=k(x+1)(x-2)(x-4)+3$

又 $f(1)=15$ ⇨ $15=k\times 2\times(-1)\times(-3)+3$ ⇨ $6k=12$ ⇨ $k=2$

故 $f(x)=2(x+1)(x-2)(x-4)+3$

$=2(x^3-5x^2+2x+8)+3=2x^3-10x^2+4x+19$

例題 6

設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(-1)=f(3)=0$ 且 $f(1)=-12$，$f(0)=-3$，則多項式 $f(x)=$________。

■：令 $f(x)=(x+1)(x-3)(ax+b)$

又 $f(1)=-12$ ⇨ $-4(a+b)=-12$

$f(0)=-3$ ⇨ $-3b=-3$　解之得 $b=1$，$a=2$

故 $f(x)=(x+1)(x-3)(2x+1)=2x^3-3x^2-8x-3$

例題 7

設多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$，$x-2$ 之餘式分別為 -8，1，則 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-2)$ 之餘式為________。

■：由題意知 $f(-1)=-8$，$f(2)=1$

令 $f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

⇨ $\begin{cases} f(-1)=-a+b=-8 \\ f(2)=2a+b=1 \end{cases}$

解之得 $a=3$，$b=-5$，故 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-2)$ 之餘式爲 $3x-5$

例題 8

設多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$，$x-3$，$x+4$ 之餘式分別為 2，16，-19，則 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-3)(x+4)$ 之餘式為________。

■：由題意知 $f(-1)=2$，$f(3)=16$，$f(-4)=-19$

令 $f(x)=(x+1)(x-3)(x+4)Q(x)+ax^2+bx+c$

⇨ $\begin{cases} f(-1)=a-b+c=2 \\ f(3)=9a+3b+c=16 \\ f(-4)=16a-4b+c=-19 \end{cases}$，解之得 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{9}{2}$，$c=7$

故 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-3)(x+4)$ 之餘式爲 $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+7$

例題 9

多項式 $f(x)$ 除以 x^2+2x+3 及 $x-1$ 之餘式依次為 $x+11$ 及 6，則 $f(x)$ 除以 $(x^2+2x+3)(x-1)$ 之餘式為________。

■：令 $f(x)=(x^2+2x+3)(x-1)Q(x)+a(x^2+2x+3)+x+11$

又 $f(1)=a\times 6+12=6 \Rightarrow a=-1$

故所求餘式爲 $-(x^2+2x+3)+x+11=-x^2-x+8$

例題 10

多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 及 $(x-2)^2$ 之餘式依次為 $3x$ 及 $3x+2$，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2(x-2)$ 之餘式為________。

■：由題意知

$f(x)=(x-1)^2Q_1(x)+3x \Rightarrow f(1)=3$

$f(x)=(x-2)^2Q_2(x)+3x+2 \Rightarrow f(2)=8$

令 $f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+3x$

$\Rightarrow f(2)=a+6=8 \Rightarrow a=2$

故所求餘式爲 $2(x-1)^2+3x=2x^2-x+2$

例題 11

設 $f(x)$ 為三次多項式，若以 x^2-1 除之餘式為 $x+1$，以 x^2+1 除之餘式為 $-x-1$，則 $f(x)=$________。

■：由題意知 $f(x)=(x^2-1)Q(x)+x+1$

$\Rightarrow f(1)=2$，$f(-1)=0$

又 $\because f(x)$ 爲三次多項式

$\therefore$ 令 $f(x)=(x^2+1)(ax+b)+(-x-1)$

由 $\begin{cases} f(1)=2(a+b)-2=2 \\ f(-1)=2(-a+b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=0 \end{cases}$

解之得 $a=1$，$b=1$

故 $f(x)=(x^2+1)(x+1)+(-x-1)=x^3+x^2$

例題 12

求 $f(x)=2x^4-3x^3-6x^2-8x-3$ 的整係數一次因式為________。

■：設 $ax-b$ 爲 $f(x)$ 之一次因式，其中 a，b 爲整數且 $(a,b)=1$

則 a 可能爲 ± 1，± 2，且 b 可能爲 ± 1，± 3

因此可能的一次因式爲

$x+1$，$x-1$，$x+3$，$x-3$，$2x+1$，$2x-1$，$2x+3$，$2x-3$

又 $f(1)=2-3-6-8-3=-18$，$f(-1)=2+3-6+8-3=4$

不滿足 $(a-b)\mid f(1)$ 的有 $x+3$，$2x+3$

不滿足 $(a+b)\mid f(-1)$ 的有 $2x-1$，$2x-3$

剩下 $x-3$ 及 $2x+1$ 再以綜合除法檢查得 $f(3)=0$，$f(-\frac{1}{2})=0$

$\therefore f(x)$ 的整係數一次因式爲 $x-3$，$2x+1$

例題 13

設多項式 $f(x)=15x^3+ax^2+bx+180$，其中 a，b 是正整數，若下列的選項中有 $f(x)$ 的因式，請問是哪一個？ (A) $2x-5$ (B) $5x-8$ (C) $3x+5$ (D) $3x-10$ (E) $10x+9$。

■：由整係數一次因式檢驗法知只有

(C) $3x+5$ (D) $3x-10$ 才有可能爲 $f(x)$ 之因式

又 $f(x)=15x^3+ax^2+bx+180$（其中 a，b 是正整數）之係數均爲正數

$\therefore f(\frac{10}{3})\neq 0$　故選(C)

例題 14

假設整係數方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$ 有四個相異的正整數根，則四根之和為________。

■：令 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+40$

由整係數一次因式檢驗法知

其可能的一次因式爲

$x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm4$，$x\pm5$，$x\pm8$，$x\pm10$，$x\pm20$，$x\pm40$

爲滿足常數項爲 40，且爲四個相異的正整數根

$\therefore f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+40=(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$

亦即 $f(x)=0$ 之四根爲 1，2，4，5

故四根之和爲 $1+2+4+5=12$

3-3

例題 1

設 $f(x)=(x+1)^3(2x-1)^2(3x-1)^3$，$g(x)=(x+1)^4(3x-1)^2(x-2)^3$，

則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之

(1) 最高公因式為________。

(2) 最低公倍式為________。

■：(1) 最高公因式爲 $(x+1)^3(3x-1)^2$

(2) 最低公倍式爲 $(x+1)^4(3x-1)^3(2x-1)^2(x-2)^3$

例題 2

設 $f(x)=2x^3-x^2-2x+1$，$g(x)=4x^3-4x^2-x+1$，$h(x)=2x^3-3x^2-3x+2$，則 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 之

(1) 最高公因式為________。　(2) 最低公倍式為________。

■：$f(x)=2x^3-x^2-2x+1=x^2(2x-1)-(2x-1)$

$=(2x-1)(x^2-1)=(2x-1)(x+1)(x-1)$

$g(x)=4x^3-4x^2-x+1=4x^2(x-1)-(x-1)$

$=(x-1)(4x^2-1)=(x-1)(2x+1)(2x-1)$

$h(x)=2x^3-3x^2-3x+2=2(x^3+1)-3x(x+1)$

$=2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=(x+1)(2x^2-2x+2-3x)$

$=(x+1)(2x^2-5x+2)=(x+1)(x-2)(2x-1)$

故(1) 最高公因式爲 $2x-1$

(2) 最低公倍式爲 $(2x-1)(x+1)(x-1)(2x+1)(x-2)$

例題 3

試利用輾轉相除法求 x^4+2x^3+5x+2 與 $x^3-x^2-11x-4$ 的

(1) 最高公因式為________。　(2) 最低公倍式為________。

■：由輾轉相除法知

1+3	1+2+ 0+ 5+ 2	1−1−11−4	1−4
	1−1−11− 4	1+3+ 1	
	3+11+ 9+ 2	−4−12−4	
	3− 3−33−12	−4−12−4	
14	14+42+14	0	
	1+ 3+ 1		

(1) 最高公因式爲 x^2+3x+1

(2) 最低公倍式為 $\dfrac{(x^4+2x^3+5x+2)(x^3-x^2-11x-4)}{x^2+3x+1}$

$=(x^4+2x^3+5x+2)(x-4)$

$=x^5-2x^4-8x^3+5x^2-18x-8$

例題 4

設兩多項式的最高次項係數均為 1 且次數相同，若此兩多項式的最高公因式為 $x-3$，最低公倍式為 $x^3-8x^2+21x-18$，則此兩多項式為________。

■：設兩多項式為 $f(x)$ 與 $g(x)$，且

$f(x)=(x-3)\times h(x)$，$g(x)=(x-3)\times k(x)$

其中 $h(x)$，$k(x)$ 互質且均為一次式

則最低公倍式為 $(x-3)h(x)k(x)$

又 $\dfrac{x^3-8x^2+21x-18}{x-3}=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

故兩多項式為 $(x-2)(x-3)$ 及 $(x-3)^2$

例題 5

設 $f(x)=x^3-6x^2+11x-5$，$g(x)=x^3-8x^2+19x-7$，若 $f(a)=1$ 且 $g(a)=5$，則 $a=$________。

■：設 $F(x)=f(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$

$G(x)=g(x)-5=x^3-8x^2+19x-12$

$\therefore F(a)=f(a)-1=0$，$G(a)=g(a)-5=0$

$\therefore x-a$ 是 $F(x)$ 與 $G(x)$ 之公因式

又 1		$1-6+11-6$	$1-8+19-12$	$1-4$
		$1-8+19-12$	$1-4+3$	
	2	$2-8+6$	$-4+16-12$	
		$1-4+3$	$-4+16-12$	
			0	

$\therefore f(x)-1$ 與 $g(x)-5$ 之最高公因式為 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$\therefore x-a=x-1$ 或 $x-3$，故 $a=1$ 或 3

例題 6

已知多項式 $f(x)=x^3+3x^2+x-5$ 與 $g(x)=x^3+x^2+ax-3$ 的最高公因式為一次式，則整數 $a=$________。

■：$\because f(x)=x^3+3x^2+x-5$

$=(x-1)(x^2+4x+5)$

1	+3	+1	−5	1
	+1	+4	+5	
1	+4	+5	，+0	

又最高公因式為一次式

$\therefore$最高公因式為 $x-1$

$\therefore g(1)=0 \Rightarrow 1+1+a-3=0 \Rightarrow a=1$

例題 7

設 k 為實數，$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$，$g(x)=x^3+k^2x^2+2kx-16$，

(1) 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有一次式之最高公因式，則 $k=$________，H.C.F. 為________。

(2) 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有二次式之最高公因式，則 $k=$________，H.C.F. 為________。

■：由整係數一次因式檢驗法知 $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$

若 $g(x)$ 有 $x-1$ 之因式，則 $g(1)=0 \Rightarrow k=3$ 或 -5⋯⋯⋯⋯⋯⋯①

若 $g(x)$ 有 $x-3$ 之因式，則 $g(3)=0 \Rightarrow k$ 無實數解⋯⋯⋯⋯⋯⋯②

若 $g(x)$ 有 $x+2$ 之因式，則 $g(-2)=0 \Rightarrow k=3$ 或 -2⋯⋯⋯⋯⋯③

由①、②、③知，當 $k=3$ 時，H.C.F.$=(x-1)(x+2)$

當 $k=-5$ 時，H.C.F.$=x-1$

當 $k=-2$ 時，H.C.F.$=x+2$

由以上知

(1) 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有一次式之最高公因式，則 $k=-5$ 或 -2

其 H.C.F. 為 $x-1$ 或 $x+2$

(2) 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有二次式之最高公因式，則 $k=3$

其 H.C.F. 為 $(x-1)(x+2)$

例題 8

若 $f(x)=x^{66}-2x^2-1$，$g(x)=x^{64}-3x^2-4$，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式為________。

■：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式為 $d(x)$

則 $d(x) \mid (x^{66}-2x^2-1)$

$d(x) \mid (x^{64}-3x^2-4)$

$\Rightarrow d(x) \mid [(x^{66}-2x^2-1)-x^2(x^{64}-3x^2-4)]$

$\Rightarrow d(x) \mid (3x^4+2x^2-1)$

$\Rightarrow d(x) \mid [(x^2+1)(3x^2-1)]$

$\therefore f(x)$，$g(x)$ 的公因式可能為 x^2+1，$3x^2-1$

但 $f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})\neq 0$，$g(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})\neq 0$

又令 $x^2=-1$ 代入得 $f(x)=g(x)=0$

故 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式為 x^2+1

例題 9

若多項式 $f(x)=x^2+(c+1)x-3c$ 與 $g(x)=2x^2+(2c-3)x-6c+5$ 之最高公因式為一次式，則 $c=$________，又最高公因式為________。

■：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式爲 $d(x)$

則 $d(x)\mid[x^2+(c+1)x-3c]$

$d(x)\mid[2x^2+(2c-3)x-6c+5]$

$\Rightarrow d(x)\mid\{2[x^2+(c+1)x-3c]-[2x^2+(2c-3)x-6c+5]\}$

$\Rightarrow d(x)\mid(5x-5)\Rightarrow d(x)\mid[5(x-1)]$

又最高公因式爲一次式　$\therefore$最高公因式爲 $x-1$

$\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow 1+(c+1)-3c=0\Rightarrow c=1$　　故 $c=1$ 且最高公因式爲 $x-1$

例題 10

已知多項式 $f(x)=x^2+3x+a$ 與 $g(x)=x^3+x^2+x-1+a$ 的最低公倍式為四次式，且 a 為整數，則 $a=$________，又最高公因式為________，最低公倍式為________。

■：$\because f(x)$，$g(x)$ 之 *L.C.M.* 爲四次式　　$\therefore$ *H.C.F.* 爲一次式

設 *H.C.F.* 爲 $d(x)\Rightarrow d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$

$\therefore d(x)\mid[g(x)-f(x)]=x^3-2x-1=(x+1)(x^2-x-1)$

$\because a\in\mathbb{Z}$ 且 x^2-x-1 沒有一次因式

$\therefore d(x)=x+1\Rightarrow(x+1)\mid f(x)$

故 $f(-1)=1-3+a=0\Rightarrow a=2$

$$\therefore\begin{cases}f(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)\\ g(x)=x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)\end{cases}$$

故最高公因式爲 $x+1$，最低公倍式爲 $(x+1)(x+2)(x^2+1)$

例題 11

若 $f(x)=x^3+2x^2+ax+1$ 與 $g(x)=x^3+x^2+bx+2$ 之最高公因式為二次式，則數對 $(a,b)=$________。

■：設最高公因式爲 $d(x)$，則 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$

$\Rightarrow d(x)\mid[f(x)-g(x)]=x^2+(a-b)x-1$

$d(x)\mid[2f(x)-g(x)]=x^3+3x^2+(2a-b)x=x[x^2+3x+(2a-b)]$

$\because f(0)=1\neq0$，$g(0)=2\neq0$

$\therefore x$ 非其公因式

$\Rightarrow x^2+(a-b)x-1$ 與 $x^2+3x+(2a-b)$ 均爲最高公因式

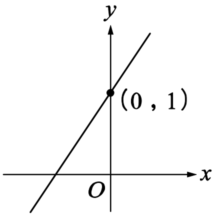
$$\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{a-b}{3}=\frac{-1}{2a-b}$$

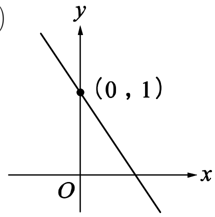
$$\therefore\begin{cases}a-b=3\\ 2a-b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=-7\end{cases}$$，故數對 $(a,b)=(-4,-7)$

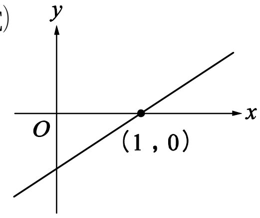
3-4

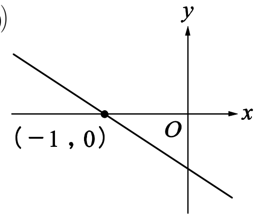
例題 1

下列圖形何者可為函數 $f(x)=1-ax$（其中 $a>0$）之圖形？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

■：令 $y=f(x)=1-ax=-ax+1$

$\because a>0 \quad \therefore -a<0$

亦即 $y=-ax+1$ 之斜率爲負，且過點 $(0，1)$，故選(B)

例題 2

某次考試，全班最高分為 50 分，最低為 20 分，現在擬用一個線性函數來加分，使 20 分變為 60 分，50 分變為 100 分，則：

(1) 若原來考 41 分，加分後為________分。

(2) 若加分後為 72 分，則原來為________分。

■：

令 $y=ax+b \Rightarrow \begin{cases} 60=20a+b \\ 100=50a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{3} \\ b=\dfrac{100}{3} \end{cases} \quad \therefore y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{100}{3}$

故(1) $y=\dfrac{4}{3}\times 41+\dfrac{100}{3}=88$（分）

(2) $72=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{100}{3} \Rightarrow x=29$（分）

例題 3

試作下列各圖形，並求其頂點坐標與對稱軸方程式：

(1) $y=3x^2+6x+1$。　　(2) $y=-2x^2+6x-5$。

■：(1) $y=3x^2+6x+1=3(x+1)^2-2$

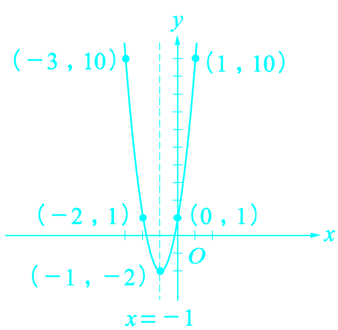
爲以 $(-1，-2)$ 爲頂點

$x=-1$ 爲對稱軸且開口向上之拋物線

又

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	10	1	-2	1	10

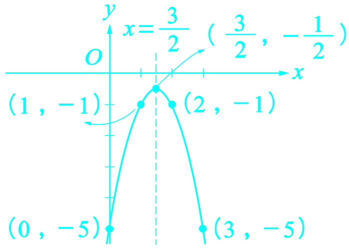
圖形如右



(2) $y=-2x^2+6x-5=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

爲以 $\left(\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}\right)$ 爲頂點

$x=\frac{3}{2}$ 爲對稱軸且開口向下之拋物線



又

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	-5	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	-5

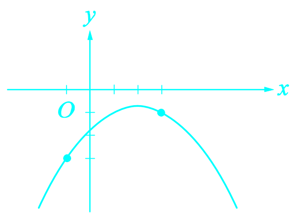
圖形如右

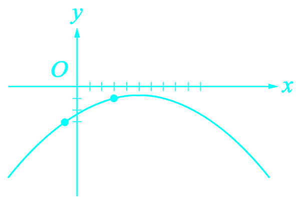
例題 4

設 a，b，c 為實數，且二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足 $f(-1)=-3$，$f(3)=-1$，$b^2-4ac<0$，則 (A) $a<0$ (B) $c<0$ (C) $f(0)<f(1)$ (D) $f(4)<f(5)$ (E) $f(-3)<f(-2)$ 。

■：$\because f(-1)=-3$，$f(3)=-1$ 且 $b^2-4ac<0$

知圖形如下





得 $a<0$，$b<0$，$f(0)<f(1)$，$f(4)$ 與 $f(5)$ 不能比較，$f(-3)<f(-2)$

故選(A)(B)(C)(E)

例題 5

設 a，b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$，滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$，試問下列何者為真？ (A) $f(0)>0$ (B) $f(-1)>0$ (C) $f(-2)>0$ (D) $f(-3)>0$ (E) $f(-4)>0$。

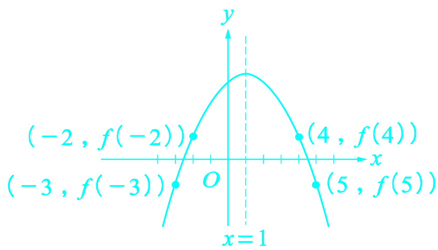
■：拋物線 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 之對稱軸爲 $x=1$

又 $f(4)>0$，$f(5)<0$

$\therefore$ 拋物線開口向下

亦即當 $-2<x<4$ 時，函數值爲正

當 $x<-3$ 或 $x>5$ 時，函數值爲負



故 $f(0)>0$，$f(-1)>0$，$f(-2)>0$，

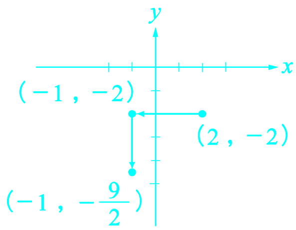
$f(-3)<0$，$f(-4)<0$

故選(A)(B)(C)

例題 6

將二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$ 沿著 x 軸正向移動 a 單位，再沿著 y 軸正向移動 b 單位，使新圖形的方程式為 $y=\frac{1}{2}x^2+x-4$，則數對（a，b）＝________。

■：$y=\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$ 經平移得



$y=\frac{1}{2}x^2+x-4=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{9}{2}$

利用頂點平移可知（2，－2）經右向平移－3 單位

再向上平移$-\frac{5}{2}$單位可得（-1，$-\frac{9}{2}$）

故數對（a，b）＝（-3，$-\frac{5}{2}$）

例題 7

設 Γ：$y=2x^2$，將 Γ 平移至 Γ'，使 Γ' 的對稱軸為 $x=3$，且過點（2，6），則 Γ' 之方程式為________。

■：設 Γ'：$y=2(x-3)^2+k$

∵過點（2，6）代入 ⇨ $6=2+k$ ⇨ $k=4$

故 Γ'：$y=2(x-3)^2+4=2x^2-12x+22$

例題 8

(1) 試作 $y=f(x)=|x^2-3x|-x+1$ 之圖形。

(2) 承(1)題，當 $x=$________時，$f(x)$ 有最小值為________。

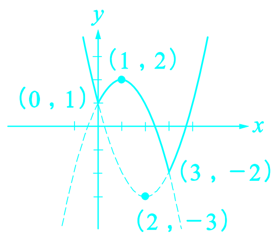
(3) 若方程式 $|x^2-3x|-x+1=k(k\in\mathbb{R})$ 恰有兩個相異之實根，則 k 之範圍為________。

■：(1) ① 當 $x^2-3x\geq 0$ 時，即 $x(x-3)\geq 0$ ⇨ $x\geq 3$ 或 $x\leq 0$

得 $y=x^2-3x-x+1=(x-2)^2-3$

② 當 $x^2-3x<0$ 時，即 $x(x-3)<0$ ⇨ $0<x<3$

得 $y=-x^2+3x-x+1=-(x-1)^2+2$



(2) 由右圖可知，當 $x=3$，$f(x)$ 有最小值爲-2

(3) 即求 $\begin{cases} y=|x^2-3x|-x+1 \\ y=k \end{cases}$ 兩圖形交點之個數

∵恰有兩個相異之實根，故 $-2<k<1$ 或 $k>2$

例題 9

已知二次函數 $y=f(x)$ 的圖形過三點 $(-1,2)$，$(0,6)$，$(1,12)$，則 $f(x)=$________，其頂點坐標為________，對稱軸方程式為________。

■：設 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$，則

$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ c=6 \\ a+b+c=12 \end{cases}$$ 解之得 $a=1$，$b=5$，$c=6$

$\therefore f(x)=x^2+5x+6$

又 $y=f(x)=x^2+5x+6=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$\therefore$頂點坐標爲 $\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，對稱軸方程式爲 $x+\dfrac{5}{2}=0$

例題 10

已知二次函數 $y=f(x)$ 過點 $(1,5)$，$(4,11)$ 且其對稱軸方程式為 $x=2$，則 $f(x)=$________。

■：令 $y=f(x)=a(x-2)^2+k$

$\because$過點 $(1,5)$，$(4,11)$ 代入得 $\begin{cases} a+k=5 \\ 4a+k=11 \end{cases}$ 解之得 $a=2$，$k=3$

故 $f(x)=2(x-2)^2+3=2x^2-8x+11$

例題 11

二次函數 $y=2x^2+ax+b$ 的圖形通過點 $(2,3)$，且頂點在直線 $y=4x-3$ 上，則數對 $(a,b)=$________。

■：$y=2x^2+ax+b=2\left(x+\dfrac{a}{4}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{8}$，故頂點 $\left(-\dfrac{a}{4},b-\dfrac{a^2}{8}\right)$

$\because$頂點在 $y=4x-3$ 上

$\therefore b-\dfrac{a^2}{8}=4\times\left(-\dfrac{a}{4}\right)-3 \Rightarrow b=\dfrac{a^2}{8}-a-3$ ……………①

而圖形又通過點 $(2,3)$

$\therefore 3=8+2a+b \Rightarrow b=-2a-5$……………………………②

②代入①得 $\dfrac{a^2}{8}-a-3=-2a-5 \Rightarrow a=-4$，$b=3$

故數對 $(a,b)=(-4,3)$

例題 12

(1) 若 $y=f(x)=2x^2+3x+4$，則當 $x=$________時，$f(x)$ 有最小值為________。

(2) 若 $y=f(x)=-4x^2+5x-7$，則當 $x=$________時，$f(x)$ 有最大值為________。

■：(1) $y=2x^2+3x+4=2(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{8}$，故當 $x=-\frac{3}{4}$ 時，y 有最小值爲 $\frac{23}{8}$

(2) $y=-4x^2+5x-7=-4(x-\frac{5}{8})^2-\frac{87}{16}$，故當 $x=\frac{5}{8}$ 時，y 有最大值爲 $-\frac{87}{16}$

例題 13

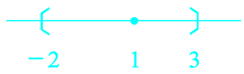
(1) 已知 $f(x)=3x^2-6x+8$，若 $-2\leqq x\leqq 3$，則 $f(x)$ 之最大值為________，最小值為________。

(2) 已知 $f(x)=-2x^2+12x-13$，若 $0\leqq x\leqq 2$，則 $f(x)$ 之最大值為________，最小值為________。

■：(1) $f(x)=3x^2-6x+8=3(x-1)^2+5$，又 $-2\leqq x\leqq 3$

故當 $x=-2$ 時，$f(x)$ 有最大值爲 32

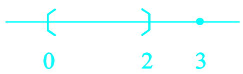
當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最小值爲 5



(2) $f(x)=-2x^2+12x-13=-2(x-3)^2+5$，又 $0\leqq x\leqq 2$

故當 $x=2$ 時，$f(x)$ 有最大值爲 3

當 $x=0$ 時，$f(x)$ 有最小值爲 -13



例題 14

某旅行社招攬三天兩夜旅行團，預定人數為 30 人，每人收費 5000 元，但達到 30 人以後，若每增加 1 人則每人減收 100 元。問應增加________人，這旅行社最多共可收到________元。

■：設增加 x 人，共收入 y 元

則 $y=(5000-100x)(30+x)$

$=150000+5000x-3000x-100x^2$

$=-100x^2+2000x+150000$

$=-100(x^2-20x+10^2)+10000+150000$

$=-100(x-10)^2+160000\leqq 160000$

當 $x=10$ 時，$y=160000$ 爲最大值

故應增加 10 人，最多共可收到 160000 元

例題 15

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，若在 $x=3$ 時，有最大值 8，則數對 $(a,b)=$________。

■：∵在 $x=3$ 時，有最大值 8

∴令 $y=a(x-3)^2+8$，其中 $a<0$ ⇨ $y=ax^2-6ax+(9a+8)$

又 $y=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ ∴ $\begin{cases} b=-6a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 9a+8=\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

由② ⇨ $9a^2+8a-1=0$ ⇨ $(a+1)(9a-1)=0$ ⇨ $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{9}$（∵$a<0$ ∴不合）

代入①得 $b=6$，故數對 $(a, b)=(-1, 6)$

例題 16

設 $f(x)=kx^2+2x+1$ 為二次函數，若對所有實數 x，$f(x)>0$ 恆成立，則 k 值的範圍為__________．

■：∵ $f(x)=kx^2+2x+1>0$ 恆成立

∴$k>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$

且 $D=2^2-4\times k\times 1<0$

⇨ $4k>4$ ⇨ $k>1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$

由①、②得 $k>1$