3-1三角函數的圖形

例題 1

(1) 將下列各角化為以弧度為單位：

① 54°．　　　　② -120°．

(2) 將下列各角化為以度為單位：

① $\dfrac{11\pi}{12}$．　　　　② -3．

解：(1) ① $54^\circ=54\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{3\pi}{10}$（弧度）

② $-120^\circ=(-120)\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{2\pi}{3}$（弧度）

(2) ① $\dfrac{11\pi}{12}$（弧度）$=\dfrac{11\pi}{12}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=165^\circ$

② -3（弧度）$=(-3)\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=-\dfrac{540^\circ}{\pi}$

例題 2

試求 $\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{7\pi}{6}+\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=$________．

解：原式$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$

例題 3

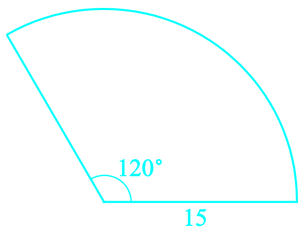
(1) 一扇形的半徑為 15 公分，圓心角為 120°，則扇形的弧長為________公分，面積為________平方公分．

(2) 已知圓 O 的半徑為 10，$\overset{\frown}{AB}$ 的弧長為 $\dfrac{5\pi}{4}$，則 $\angle AOB$ 的弧度為________，扇形 OAB 的面積為________．

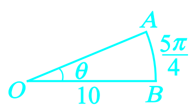
解：(1) 圓心角爲 $120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2\pi}{3}$

弧長$=15\times\dfrac{2\pi}{3}=10\pi$（公分）

面積$=\dfrac{1}{2}\times15^2\times\dfrac{2\pi}{3}=75\pi$（平方公分）



(2) 設$\angle AOB=\theta$（弧度）

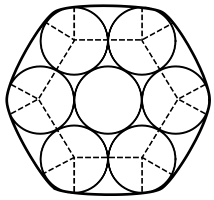


$\because \overset{\frown}{AB}$ 的長$=r\theta$　$\therefore 10\theta=\dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{8}$（弧度）

扇形面積$=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times 10^2\times\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{25\pi}{4}$

例題 4

包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如右圖所示，試問外圍粗黑線條的長度為________．　〔90.社會組〕



解：如題圖所示

依次連結外圍六圓圓心，得一正六邊形，其內角爲 120°

分別自六圓圓心作外公切線之垂線，則所得扇形之圓心角爲 60°

因此所求長度爲六條外公切線長加上六個 $\dfrac{1}{6}$ 圓周

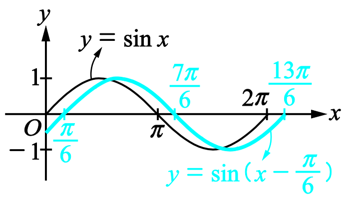
即 $6\times 2+6\times\dfrac{2\pi}{6}=12+2\pi$

例題 5

利用 $y=\sin x$ 的圖形，描繪出下列各函數的圖形，並求其週期：

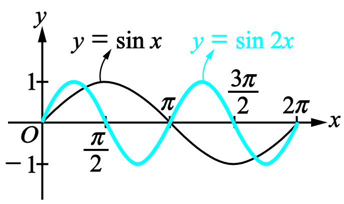
(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$．　(2) $y=\sin 2x$．

解：(1)



其週期爲 2π

(2)



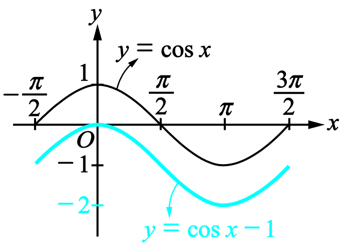
其週期爲 π

例題 6

利用 $y=\cos x$ 的圖形，描繪出下列各函數的圖形，並求其週期：

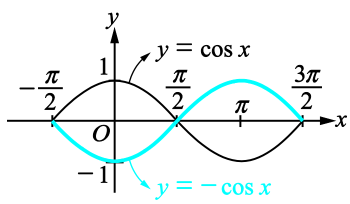
(1) $y=\cos x-1$．　(2) $y=-\cos x$．

解：(1)



其週期爲 2π

(2)



其週期爲 2π

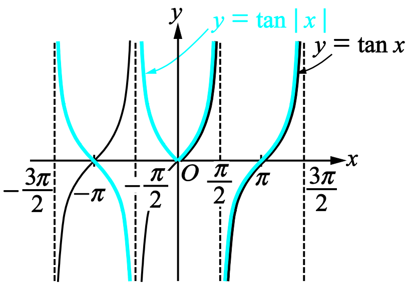
例題 7

利用 $y=\tan x$ 的圖形，描繪出下列各函數的圖形，並求其週期：

(1) $y=\tan|x|$ 。　　　　(2) $y=|\tan x|$ 。

解：(1) 當 $x\geqq 0$ 時，$y=\tan|x|=\tan x$

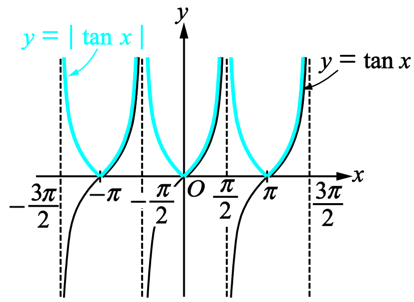
當 $x<0$ 時，$y=\tan(-x)=-\tan x$



由圖形知

$y=\tan|x|$ 不是週期函數

(2)



其週期為 π

例題 8

設 $0\leqq x\leqq \pi$ ，則方程式 $2\cos^2 x+\sin x-2=0$ 之解為________ 。

解：$2\cos^2 x+\sin x-2=0$

⇨ $2(1-\sin^2 x)+\sin x-2=0$

⇨ $-2\sin^2 x+\sin x=0$

⇨ $\sin x(1-2\sin x)=0$

⇨ $\sin x=0$ 或 $\sin x=\frac{1}{2}$

又 $0\leqq x\leqq \pi$ 　$\therefore x=0$，π 或 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$

故方程式之解為 $x=0$，π，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$

例題 9

設 $0\leqq x<2\pi$ ，則不等式 $\cos x+2\sin^2 x>1$ 之解為________ 。

解：$\cos x+2\sin^2 x>1$

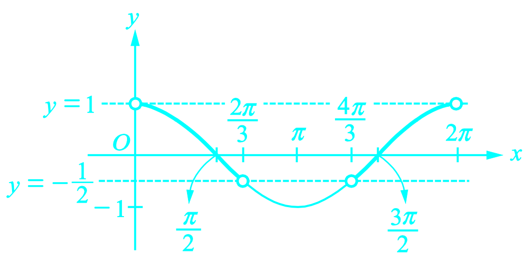
⇨ $\cos x+2-2\cos^2 x>1$

⇨ $2\cos^2 x-\cos x-1<0$

⇨ $(\cos x-1)(2\cos x+1)<0$

⇨ $-\frac{1}{2}<\cos x<1$

⇨ $0<x<\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}<x<2\pi$



3-2和角公式

例題 1

試求下列各式之值：

(1) $\sin13^\circ\cos107^\circ+\cos13^\circ\sin107^\circ$。

(2) $\sin200^\circ\cos280^\circ-\sin100^\circ\cos160^\circ$。

(3) $\cos(28^\circ+\theta)\cos(32^\circ-\theta)-\sin(28^\circ+\theta)\sin(32^\circ-\theta)$。

解：

(1) 原式$=\sin(13^\circ+107^\circ)=\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 原式$=(-\sin20^\circ)(\cos80^\circ)-(\sin80^\circ)(-\cos20^\circ)$

$=\sin80^\circ\cos20^\circ-\cos80^\circ\sin20^\circ=\sin(80^\circ-20^\circ)=\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) 原式$=\cos[(28^\circ+\theta)+(32^\circ-\theta)]=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

例題 2

若已知$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$且$\sin\alpha=\dfrac{13}{14}$，$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$且$\sin\beta=-\dfrac{11}{14}$，則：

(1) $\cos(\alpha+\beta)=$________。 (2) $\alpha+\beta=$________。

解：

$\because\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$且$\sin\alpha=\dfrac{13}{14}$ $\therefore\cos\alpha=\dfrac{-3\sqrt{3}}{14}$

又$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$且$\sin\beta=-\dfrac{11}{14}$ $\therefore\cos\beta=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=(-\dfrac{3\sqrt{3}}{14})(\dfrac{5\sqrt{3}}{14})-\dfrac{13}{14}\times(-\dfrac{11}{14})=\dfrac{98}{196}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\because\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ ⇨ $2\pi<\alpha+\beta<3\pi$

又$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，故$\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{3}$

例題 3

$\triangle ABC$中，若$\cos A=\dfrac{12}{13}$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，則$\cos C=$________。

解：

$\cos A=\dfrac{12}{13}$ ⇨ $\sin A=\dfrac{5}{13}$，又$\cos B=\dfrac{4}{5}$ ⇨ $\sin B=\dfrac{3}{5}$

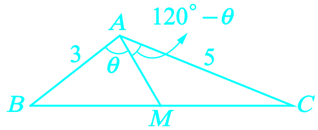
故$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=-(\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5})=-\dfrac{48-15}{65}=-\dfrac{33}{65}$

例題 4

在△ABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且 $\angle BAC=120^\circ$，則 $\tan\angle BAM$ ＝________。 〔96.學測〕

解：如右圖，令 $\angle BAM=\theta$ ⇨ $\angle MAC=120^\circ-\theta$



∵ M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點　∴△ABM 面積＝△ACM 面積

⇨ $\frac{1}{2}\times3\times\overline{AM}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times\overline{AM}\times\sin(120^\circ-\theta)$

⇨ $3\sin\theta=5\sin(120^\circ-\theta)$

⇨ $3\sin\theta=5(\sin120^\circ\cos\theta-\cos120^\circ\sin\theta)=\frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta$

⇨ $\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\theta$ ⇨ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=5\sqrt{3}$

例題 5

試求下列各式之值：

(1) $\frac{\tan59^\circ-\tan29^\circ}{1+\tan59^\circ\tan29^\circ}=$________。　　(2) $\tan13^\circ+\tan32^\circ+\tan13^\circ\tan32^\circ=$________。

解：(1) $\frac{\tan59^\circ-\tan29^\circ}{1+\tan59^\circ\tan29^\circ}=\tan(59^\circ-29^\circ)=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) ∵ $\tan45^\circ=\tan(13^\circ+32^\circ)$　∴ $1=\frac{\tan13^\circ+\tan32^\circ}{1-\tan13^\circ\tan32^\circ}$

⇨ $1-\tan13^\circ\tan32^\circ=\tan13^\circ+\tan32^\circ$

⇨ $\tan13^\circ+\tan32^\circ+\tan13^\circ\tan32^\circ=1$

例題 6

(1) 若 $\tan\alpha=2$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，則 $\tan\beta=$________。

(2) 若 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，則 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$________。

解：(1) ∵ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ⇨ $\frac{2-\tan\beta}{1+2\tan\beta}=\frac{1}{2}$

⇨ $4-2\tan\beta=1+2\tan\beta$ ⇨ $\tan\beta=\frac{3}{4}$

(2) ∵ $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$　∴ $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{3\pi}{4}$

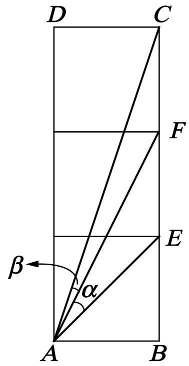
⇨ $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$ ⇨ $\tan\alpha+\tan\beta=-1+\tan\alpha\tan\beta$

⇨ $\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha-\tan\beta=1$

原式$=1-\tan\alpha-\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1+1=2$

例題 7

如右圖，三正方形的邊長皆為 4，則 $\tan\beta=$________。



解：在△ABF 中，$\tan(\alpha+45^\circ)=\dfrac{8}{4}=2$

在△ABC 中，$\tan(\alpha+\beta+45^\circ)=\dfrac{12}{4}=3$

$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta+45^\circ)-(\alpha+45^\circ)]$

$=\dfrac{\tan(\alpha+\beta+45^\circ)-\tan(\alpha+45^\circ)}{1+\tan(\alpha+\beta+45^\circ)\tan(\alpha+45^\circ)}=\dfrac{3-2}{1+3\times2}=\dfrac{1}{7}$

例題 8

設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 為方程式 $x^2+6x+2=0$ 之兩根，則：

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$________。

(2) $\cos^2(\alpha+\beta)=$________。

(3) $2\sin^2(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+8\cos^2(\alpha+\beta)=$________。

解：(1) 由根與係數的關係知 $\tan\alpha+\tan\beta=-6$，$\tan\alpha\tan\beta=2$

⇨ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-6}{1-2}=6$

(2) $\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+6^2}=\dfrac{1}{37}$

(3) 原式$=\cos^2(\alpha+\beta)[2\tan^2(\alpha+\beta)-\tan(\alpha+\beta)+8]$

$=\dfrac{1}{37}\times(2\times6^2-6+8)=\dfrac{1}{37}\times74=2$

例題 9

設兩直線 L_1：$x+\sqrt{3}y-3=0$ 與 L_2：$\sqrt{3}x+y-8=0$ 之交角為 θ，則 $\theta=$________。

解：L_1 之斜率爲 $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$，L_2 之斜率爲 $-\sqrt{3}$

$\therefore\tan\theta=\dfrac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(-\sqrt{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⇨ $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，另一交角爲 $\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$

故 L_1 與 L_2 之交角 θ 爲 $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$

例題 10

試求下列各式之值：

(1) $\sin^2 172.5^\circ - \sin^2 127.5^\circ =$ ________ .

(2) $\cos^2 127.5^\circ - \sin^2 7.5^\circ =$ ________ .

解：(1) $\sin^2 172.5^\circ - \sin^2 127.5^\circ = \sin(172.5^\circ + 127.5^\circ)\sin(172.5^\circ - 127.5^\circ)$

$= \sin 300^\circ \sin 45^\circ = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(2) $\cos^2 127.5^\circ - \sin^2 7.5^\circ = \cos(127.5^\circ + 7.5^\circ)\cos(127.5^\circ - 7.5^\circ)$

$= \cos 135^\circ \cos 120^\circ = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

例題 11

若 $x + y = \dfrac{\pi}{3}$，則 $\cos^2 x - \cos^2 y$ 之最大值為________，最小值為________ .

解：$\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(y + x)\sin(y - x) = \sin\dfrac{\pi}{3}\sin(y - x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(y - x)$

$\because -1 \leqq \sin(y - x) \leqq 1$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(y - x) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos^2 x - \cos^2 y$ 之最大値爲 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，最小値爲 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3-3倍角與半角公式

例題 1

若 $\sin\theta$ 為方程式 $10x^2+x-3=0$ 之一根，且 $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，則：

(1) $\sin 2\theta=$________。　　(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}=$________。

解：$10x^2+x-3=0 \Rightarrow (5x+3)(2x-1)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{5}$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$

又 $\because \pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$　$\therefore -1<\sin\theta<0$　$\therefore \sin\theta=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow \cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{24}{25}$

(2) $\because \pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$

$$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

例題 2

設 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 且 $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，則：

(1) $\sin 2\theta=$________。　(2) $\cos 2\theta=$________。　(3) $\tan 2\theta=$________。

(4) $\sin\dfrac{\theta}{2}=$________。　(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}=$________。　(6) $\tan\dfrac{\theta}{2}=$________。

解：$\because \sin\theta=\dfrac{5}{13}$ 且 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \cos\theta=-\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{5}{13}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{120}{169}$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{119}{169}$

(3) $$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\left(-\frac{5}{12}\right)}{1-\left(-\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}=-\frac{120}{119}$$

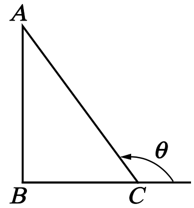
又 $\because \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$　$\therefore \dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

(4) $$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+(-\dfrac{12}{13})}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{26}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$

(6) $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\dfrac{5}{\sqrt{26}}}{\dfrac{1}{\sqrt{26}}}=5$

例題 3

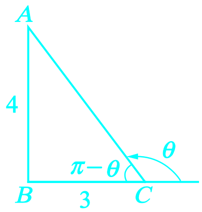


如右圖，θ 為一個有向角，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，則 $\cos\dfrac{\theta}{2}=$______。

解：$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5 \Rightarrow \cos\theta=-\cos(\pi-\theta)=-\dfrac{3}{5}$

又 $0<\theta<\pi \Rightarrow 0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+(-\dfrac{3}{5})}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



例題 4

(1) 若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，則 $\sin2\theta=$________。

(2) 若 $\sin2\theta=-\dfrac{3}{5}$，則 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=$________。

解：(1) $\because \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，平方得 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9} \Rightarrow 1-\sin2\theta=\dfrac{1}{9} \Rightarrow \sin2\theta=\dfrac{8}{9}$

(2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-\dfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2=1-\dfrac{1}{2}(\sin2\theta)^2=1-\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{41}{50}$

例題 5

試求 $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}=$________。

解：令 $P=\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$

$8\sin\dfrac{\pi}{7}\times P=8\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$

$=4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$

$\therefore 8P=-1 \Rightarrow P=-\frac{1}{8}$

亦即 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$

例題 6

試求 $\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos3\theta}{\cos\theta}=$＿＿＿＿＿＿．

解：原式 $=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}-\frac{4\cos^3\theta-3\cos\theta}{\cos\theta}$

$=(3-4\sin^2\theta)-(4\cos^2\theta-3)=3+3-4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=3+3-4=2$

例題 7

若 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$，則 $\sin3\theta+\cos3\theta=$＿＿＿＿＿＿．

解：$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$，平方得 $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9} \Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

故 $\sin3\theta+\cos3\theta=(3\sin\theta-4\sin^3\theta)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$=3(\sin\theta-\cos\theta)-4(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$

$=3(\sin\theta-\cos\theta)-4(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=3\times\frac{1}{3}-4\times\frac{1}{3}\times(1+\frac{4}{9})=1-\frac{52}{27}=-\frac{25}{27}$

例題 8

設 $f(x)=8x^3+4x^2-6x-2$，則以 $x-\sin15^\circ$ 除 $f(x)$ 之餘式為＿＿＿＿＿＿．

解：由餘式定理知

餘式 $=f(\sin15^\circ)=8\sin^3 15^\circ+4\sin^2 15^\circ-6\sin15^\circ-2$

$=2(4\sin^3 15^\circ-3\sin15^\circ)+2(2\sin^2 15^\circ-1)$

$=-2(3\sin15^\circ-4\sin^3 15^\circ)-2(1-2\sin^2 15^\circ)$

$=-2\times\sin45^\circ-2\times\cos30^\circ$

$=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

例題 13

$k\in\mathbb{R}$，若方程式 $3x^2+kx+1=0$ 之兩根為 $\sin\theta$，$\cos\theta$，則 $\cos4\theta=$________．

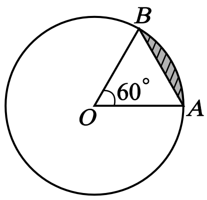
解：$3x^2+kx+1=0$ 之兩根爲 $\sin\theta$，$\cos\theta$ ⇨ $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

⇨ $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\cos4\theta=1-2(\sin2\theta)^2=1-2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$

Chap3

1. 如右圖，圓的半徑為 6，$\angle AOB=60^\circ$，則：



(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長為________。

(2) 斜線部分的面積為________。

解：(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長$=r\theta=6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

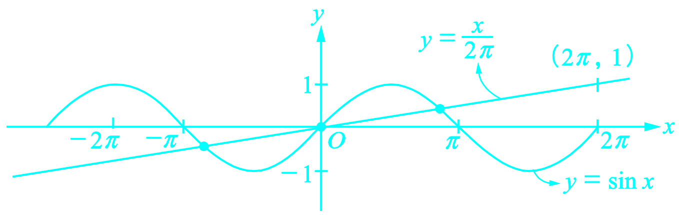
(2) 斜線部分的面積＝（扇形 AOB 的面積）－（$\triangle OAB$ 的面積）

$=\dfrac{1}{2}\times6^2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\times6^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=6\pi-9\sqrt{3}$

2. 試問方程式 $2\pi\sin x=x$ 有________個實根。

解：$2\pi\sin x=x$ 的實根個數，即為

$y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{x}{2\pi}$ 兩圖形的交點個數



由上圖知，有 3 個交點，亦即有 3 個實根

3. 已知 $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$，且 $4\sin^2x-5\cos x+2=0$，則：

(1) $\tan x=$________。 (2) $\tan2x=$________。

解：$4\sin^2x-5\cos x+2=0$

$\Rightarrow 4-4\cos^2x-5\cos x+2=0$

$\Rightarrow 4\cos^2x+5\cos x-6=0$

$\Rightarrow (4\cos x-3)(\cos x+2)=0 \Rightarrow \cos x=\dfrac{3}{4}$ 或 -2（不合）

(1) $\because \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$ $\quad\therefore \tan x=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(2) $\tan2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\dfrac{2\times\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1-\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}{\dfrac{2}{9}}=-3\sqrt{7}$

4. 在 $0<x<\pi$ 之範圍內，兩曲線 $y=\sin x$ 與 $y=\sin 2x$ 之交點坐標為________ .

解：欲求 $y=\sin x$ 與 $y=\sin 2x$ 之交點坐標，即令 $\sin 2x=\sin x$

⇨ $2\sin x\cos x-\sin x=0$

⇨ $\sin x(2\cos x-1)=0$

⇨ $\sin x=0$ 或 $\cos x=\frac{1}{2}$

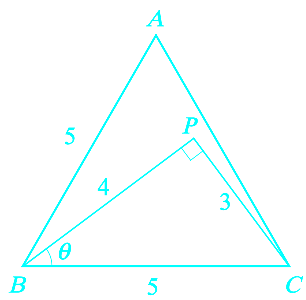
當 $\sin x=0$ $\because 0<x<\pi$ $\therefore$ 無解

當 $\cos x=\frac{1}{2}$ 且 $0<x<\pi$ $\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ⇨ $y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

亦即交點坐標爲 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. $\triangle ABC$ 是邊長為 5 的正三角形，P 點在三角形內部，若 $\overline{PB}=4$ 且 $\overline{PC}=3$，則 $\cos\angle ABP=$________ . 〔98.指考甲〕

解：令 $\angle PBC=\theta$



由右圖知 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=\frac{3}{5}$

⇨ $\cos\angle ABP=\cos(60^\circ-\theta)$

$=\cos 60^\circ\cos\theta+\sin 60^\circ\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$