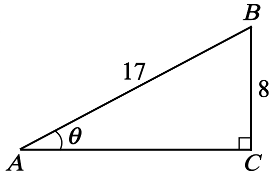
2-1　銳角的三角函數

例題 1



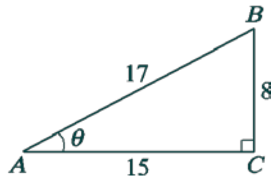
如右圖，$\triangle ABC$ 為直角三角形，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=\theta$，又 $\overline{AB}=17$，$\overline{BC}=8$，求 θ 的六個三角函數值。

■：由畢氏定理知 $\overline{AC}=\sqrt{17^2-8^2}=15$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{17}，\cos\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{15}{17}$$

$$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{8}{15}，\cot\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{15}{8}$$

$$\sec\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{17}{15}，\csc\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{17}{8}$$



例題 2

試求下列各式之值：

(1) $\sin45^\circ\cos60^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$。

(2) $\dfrac{\tan60^\circ+\cot45^\circ}{\tan45^\circ-\cot30^\circ}$。

(3) $\sin30^\circ\cot45^\circ\sec60^\circ+\cos30^\circ\tan45^\circ\csc60^\circ$。

■：

(1) 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 原式 $=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

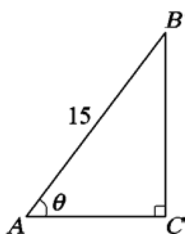
(3) 原式 $=\dfrac{1}{2}\times1\times2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times1\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=1+1=2$

例題 3

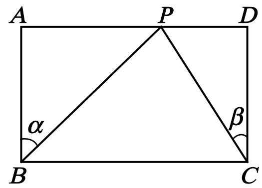
在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=\theta$，又 $\overline{AB}=15$，若 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，則 $\overline{BC}=$________，$\overline{AC}=$________。

■：$\because \sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BC}}{15}$，$\therefore \overline{BC}=15\sin\theta=15\times\dfrac{4}{5}=12$

$\overline{AC}=\sqrt{15^2-12^2}=9$



例題 4



如右圖，在長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=10$，若點 P 在 $\overline{AD}$ 上移動，但 P 點異於 A，D 兩點，則 $\tan\alpha+\tan\beta=$________。

■：設 $\overline{AP}=x$ ⇨ $\overline{PD}=10-x$

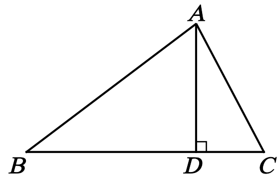
$$故\ \tan\alpha+\tan\beta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PD}}{\overline{CD}}=\frac{x}{6}+\frac{10-x}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

例題 5

如右圖，在△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若 $\overline{AB}=25$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\tan C=\dfrac{15}{8}$，則：

(1) $\overline{AD}=$________。　　(2) $\overline{BD}=$________。

(3) $\overline{AC}=$________。　　(4) $\overline{CD}=$________。



■：(1)(2) 在直角△ABD 中　∵ $\overline{AB}=25$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$

$$又\ \sin B=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AD}=\overline{AB}\cdot\sin B=25\times\frac{3}{5}=15 ⇨ \overline{BD}=\sqrt{25^2-15^2}=20$$

(3)(4) 在直角△ACD 中　∵ $\overline{AD}=15$，$\tan C=\dfrac{15}{8}$

$$又\ \tan C=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{15}{\overline{CD}} ⇨ \overline{CD}=8 ⇨ \overline{AC}=\sqrt{8^2+15^2}=17$$

例題 6

設∠A 為銳角，且 $4\cos^2A-12\cos A+5=0$，則：

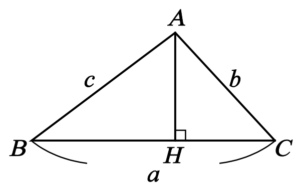
(1) $\angle A=$________。　　(2) $\cot A+\csc A=$________。

■：(1) $4\cos^2A-12\cos A+5=0$ ⇨ $(2\cos A-5)(2\cos A-1)=0$

⇨ $\cos A=\dfrac{5}{2}$（不合）或 $\cos A=\dfrac{1}{2}$　　∴ $\angle A=60^\circ$

(2) $\cot A+\csc A=\cot60^\circ+\csc60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

例題 7



如右圖，設△ABC 的三頂點 A，B，C 所對的邊長分別為 a，b，c，$\overline{BC}$ 邊上的高為 $\overline{AH}$ 且∠B 與∠C 皆為銳角，則 $\overline{AH}$ 之長為（複選）

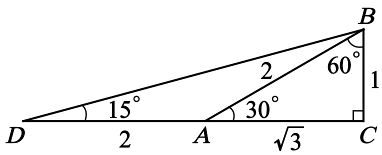
(A) $a\sin A$　(B) $b\sin B$　(C) $c\sin C$　(D) $b\sin C$　(E) $c\sin B$．

■：在直角三角形 ABH 中，$\sin B=\dfrac{\overline{AH}}{c}$ ⇨ $\overline{AH}=c\sin B$

在直角三角形 ACH 中，$\sin C=\dfrac{\overline{AH}}{b}$ ⇨ $\overline{AH}=b\sin C$　　故選(D)(E)

例題 8

我們可以依如下的方法作出 15° 角的三角函數值，先作一個 30°－60°－90° 的直角△ABC，如右圖所示，延長 $\overline{CA}$ 並在 $\overrightarrow{CA}$ 上取 $\overline{AD}=\overline{AB}$，連接 $\overline{BD}$，則 $\angle D=15^\circ$，求：



(1) $\sin 15^\circ=$________．(2) $\cos 15^\circ=$________．(3) $\tan 15^\circ=$________．

■：在△ABC 中，設 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{AC}=\sqrt{3}$，$\overline{AB}=2=\overline{AD}\Rightarrow \angle D=\angle ADB=15^\circ$

$\overline{BD}=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(1) $\sin 15^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 15^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

2-2　三角函數的基本關係

例題 1

設 θ 為銳角，試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1+\sec\theta}+\dfrac{1}{1+\csc\theta}$ 。

(2) $\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\tan\theta\cdot\cot\theta\cdot\sec\theta\cdot\csc\theta$ 。

■：(1) 原式 $=\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin\theta}}$

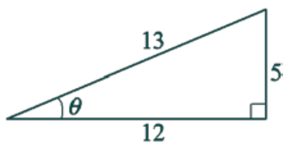
$=\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}=2$

(2) 原式 $=(\sin\theta\cdot\csc\theta)(\cos\theta\cdot\sec\theta)(\tan\theta\cdot\cot\theta)=1\times1\times1=1$

例題 2

設 θ 為銳角且 $12\sin\theta-5\cos\theta=0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ ________ 。

■：$12\sin\theta-5\cos\theta=0 \Rightarrow 12\sin\theta=5\cos\theta$



$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{12} \Rightarrow \tan\theta=\dfrac{5}{12}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{5}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，故 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}=-\dfrac{7}{13}$

例題 3

設 θ 為銳角，試化簡下列各式：

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$ 。

(2) $(\sin\theta-\csc\theta)^2-(\tan\theta-\cot\theta)^2+(\cos\theta-\sec\theta)^2$ 。

■：(1) 原式 $=\sin^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=2\times1=2$

(2) 原式 $=\sin^2\theta-2\sin\theta\cdot\csc\theta+\csc^2\theta-\tan^2\theta+2\tan\theta\cdot\cot\theta-\cot^2\theta+\cos^2\theta$

$-2\cos\theta\cdot\sec\theta+\sec^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)-2+2-2$

$=1+1+1-2=1$

例題 4

試求下列各式之值：

(1) $\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ+\sin^2 70^\circ$．

(2) $\tan^2 28^\circ-\csc^2 62^\circ$．

(3) $(\tan 10^\circ+\tan 80^\circ)^2-(\cot 10^\circ-\cot 80^\circ)^2$．

■：(1) 原式 $=\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos^2 20^\circ$

$=(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)+(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ)=1+1=2$

(2) 原式 $=\tan^2 28^\circ-\sec^2 28^\circ=-1$

(3) 原式 $=(\tan 10^\circ+\cot 10^\circ)^2-(\cot 10^\circ-\tan 10^\circ)^2$

$=(\tan^2 10^\circ+2\tan 10^\circ\cot 10^\circ+\cot^2 10^\circ)-(\cot^2 10^\circ-2\tan 10^\circ\cot 10^\circ+\tan^2 10^\circ)$

$=4\tan 10^\circ\cot 10^\circ=4\times 1=4$

例題 5

若 θ 為銳角且 $\tan\theta=2$，則 $3\sin^2\theta-4\sin\theta\cdot\cos\theta+5\cos^2\theta=$________．

■：原式 $=\cos^2\theta\left(3\cdot\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-4\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+5\right)$

$$=\frac{1}{\sec^2\theta}(3\tan^2\theta-4\tan\theta+5)=\frac{1}{1+\tan^2\theta}(3\times 4-4\times 2+5)=\frac{1}{5}\times 9=\frac{9}{5}$$

例題 6

設 θ 為一銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，則：

(1) $\sin\theta\cos\theta=$________．(2) $\tan\theta+\cot\theta=$________．(3) $\sin\theta+\cos\theta=$________．

■：(1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，平方得 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{5}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{5}{2}$

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{9}{5}$

$\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$（$\because\theta$ 爲銳角 $\therefore\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$）

例題 7

設 θ 為銳角，若方程式 $x^2+(\tan\theta+\cot\theta)x-1=0$ 有一根為 $\sqrt{5}-2$，試求下列各式之值：

(1) $\tan\theta+\cot\theta=$________ . (2) $\sin\theta\cdot\cos\theta=$________ . (3) $\sin\theta-\cos\theta=$________ .

■：(1) 設另一根為 α，由根與係數的關係知 $(\sqrt{5}-2)\times\alpha=-1$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}-2}=\frac{-(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=-\sqrt{5}-2$$

又兩根和 $=(\sqrt{5}-2)+(-\sqrt{5}-2)=-(\tan\theta+\cot\theta)\Rightarrow \tan\theta+\cot\theta=4$

(2) $\because \tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

例題 8

試證：

(1) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$.

(2) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$.

(3) $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$.

■：

(1) 左式 $=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\sin^2\theta\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\sin^2\theta(\sec^2\theta-1)=\sin^2\theta\tan^2\theta=$ 右式

(2) 左式 $=\dfrac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{2+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta=$ 右式

(3) 左式 $=\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{(\tan\theta+\sec\theta)(1-\sec\theta+\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

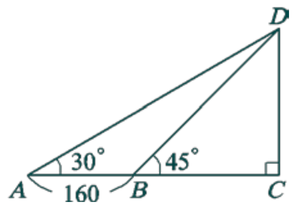
$=\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

又 $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=$ 右式

2-3 簡易測量與三角函數值表

例題 1

某人測得一山峰的仰角為 30°，當他向山腳前進 160 公尺後，再測得山峰的仰角為 45°，則山高為________公尺。



■：在等腰直角△BCD 中，設山高 $\overline{CD}=h$ 公尺

$$\overline{BC}=\overline{CD}=h \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{h+160}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h=h+160 \Rightarrow (\sqrt{3}-1)h=160$$

$$\Rightarrow h=\frac{160}{\sqrt{3}-1}=\frac{160(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{160(\sqrt{3}+1)}{2}=80(\sqrt{3}+1)$$

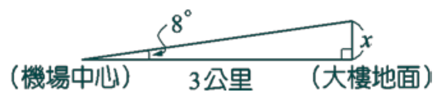
故山高爲 $80(\sqrt{3}+1)$ 公尺

例題 2

某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過 8°。某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋________層樓。（參考數據：$\sin 8^\circ \approx 0.1392$，$\cos 8^\circ \approx 0.9903$，$\tan 8^\circ \approx 0.1405$）

〔95.指考乙〕

■：如右圖，設大樓的高爲 x 公尺，則 $\tan 8^\circ=\dfrac{x}{3000}$



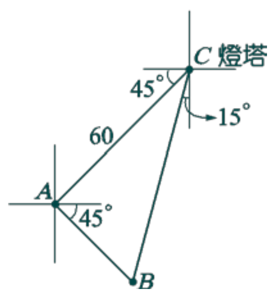
$\Rightarrow x=3000\tan 8^\circ=3000\times 0.1405 \approx 421.5$

而大樓每層 5 公尺，又 $\dfrac{421.5}{5}=84.3$，故大樓最多可蓋 84 層樓

例題 3

設 A 船在燈塔之西南，B 船在燈塔之南 15° 西且在 A 船之東南，已知 A 船距燈塔 60 公里，則 A，B 兩船相距________公里。

■：作圖如右



$\angle ACB=45^\circ-15^\circ=30^\circ$，而 $\angle BAC=90^\circ \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

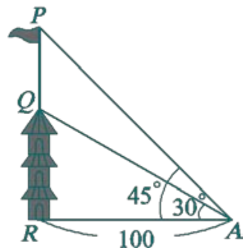
$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=60\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$

故 A，B 兩船相距 $20\sqrt{3}$ 公里

例題 4

一旗桿立於塔頂上，某人於塔底東方 100 公尺處測得旗桿上下兩端的仰角分別為 45°，30°，則旗桿之長為________公尺，塔高為________公尺。

■：設旗桿 $\overline{PQ}$，塔爲 $\overline{QR}$，觀測點爲 A



$\because \angle PAR = 45^\circ \quad \therefore \overline{PR} = \overline{AR} = 100$，又 $\Rightarrow \dfrac{\overline{QR}}{\overline{AR}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

且 $\overline{QR} = \overline{AR} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$

$\therefore \overline{PQ} = 100 - \dfrac{100}{\sqrt{3}} = \dfrac{100(3-\sqrt{3})}{3}$

故旗桿長 $\dfrac{100(3-\sqrt{3})}{3}$ 公尺，塔高 $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ 公尺

例題 5

老張從旗桿底 O 點的正西方 A 點，測得桿頂 T 點的仰角為 30°，他向旗桿前進 30 公尺至 B 點，再測得桿頂的仰角為 60°，則：

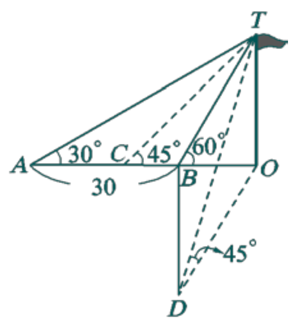
(1) 旗桿高為________公尺。

(2) B 點與桿頂 T 點的距離為________公尺。

(3) 他由 B 點回頭向 A 點走到 C 點，測得桿頂仰角為 45°，則 $\overline{BC}$ 的長為________公尺。

(4) 若他由 B 點向正南方走到 D 點，測得桿頂仰角為 45°，則 $\overline{BD}$ 的長為________公尺。

(5) $\tan\angle AOD$ 的值為________。



■：(1) $\overline{BT} = \overline{AB} = 30 \Rightarrow h = \overline{OT} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{BT} = 15\sqrt{3}$（公尺）

(2) $\overline{BT} = \overline{AB} = 30$（公尺）

(3) $\overline{CO} = \overline{OT} = 15\sqrt{3}$（公尺），$\overline{OB} = \dfrac{1}{2}\overline{OT} = 15$

$\Rightarrow \overline{BC} = \overline{CO} - \overline{BO} = 15\sqrt{3} - 15 = 15(\sqrt{3}-1)$（公尺）

(4) $\because$ 仰角爲 $45^\circ \quad \therefore \overline{DO} = h = 15\sqrt{3}$，$\overline{BO} = 15$

在 $\triangle BOD$ 中，$\overline{BD} = \sqrt{\overline{DO}^2 - \overline{BO}^2} = \sqrt{(15\sqrt{3})^2 - 15^2} = 15\sqrt{2}$（公尺）

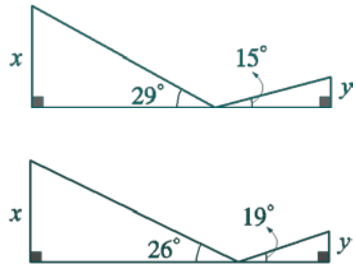
(5) $\tan\angle AOD = \tan\angle BOD = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BO}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{15} = \sqrt{2}$

例題 6

在 A，B 兩支旗竿底端連線段中的某一點測得 A 旗竿頂端的仰角為 29°，B 旗竿頂端的仰角為 15°。在底端連線段中的另一點測得 A 旗竿頂端的仰角為 26°，B 旗竿頂端的仰角為 19°，則 A 旗竿高度和 B 旗竿高度的比值約為________。（四捨五入到小數點後第一位）〔98.指考甲〕

θ	15°	19°	26°	29°
$\cot\theta$	3.73	2.90	2.05	1.80

■：設 A 旗竿長度爲 x，B 旗竿長度爲 y



$x\cot 29^\circ + y\cot 15^\circ = x\cot 26^\circ + y\cot 19^\circ$

⇨ $1.80x + 3.73y = 2.05x + 2.90y$

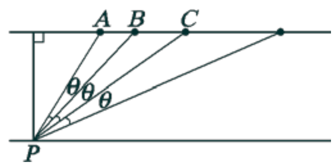
⇨ $0.83y = 0.25x$ ⇨ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{0.83}{0.25} = 3.32 \approx 3.3$

例題 7

某甲觀測一飛行中之熱氣球，發現其方向一直維持在正前方，而仰角則以等速遞減，已知此氣球之高度維持不變，則氣球正以

(A)等速飛行 (B)加速向某甲飛來 (C)減速向某甲飛來 (D)加速離某甲飛去
(E)減速離某甲飛去。

■：由右圖知，仰角以 θ 遞減



則氣球離 P 愈來愈遠且 $\overline{BC} > \overline{BA}$

⇨ 加速離去，故選(D)

例題 8

已知 $\cos 38^\circ 10' = 0.7862$，$\cos 38^\circ 20' = 0.7844$，求 $\cos 38^\circ 16' =$________。

■：設 $\cos 38^\circ 16' = k$，則

$$\left(\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\cos 38^\circ 10' = 0.7862\\ \cos 38^\circ 16' = k\end{array}\right)\\ \cos 38^\circ 20' = 0.7844\end{array}\right)$$

由內插法原理知 $\dfrac{6}{10} = \dfrac{k - 0.7862}{0.7844 - 0.7862}$

⇨ $k - 0.7862 = \dfrac{6}{10} \times (0.7844 - 0.7862) = \dfrac{6}{10} \times (-0.0018) = -0.00108$

⇨ $k = 0.78512 \approx 0.7851$，故 $\cos 38^\circ 16' = 0.7851$

例題 9

已知 $\sin 47^\circ 20' = 0.7353$，$\sin 47^\circ 30' = 0.7373$，若 $\sin\theta = 0.7359$，則 $\theta =$ ________ .

■：$\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{r} \sin 47^\circ 20' = 0.7353 \\ \sin\theta = 0.7359 \end{array}\right) \\ \sin 47^\circ 30' = 0.7373 \end{array}\right)$

由內插法原理知 $\dfrac{\theta - 47^\circ 20'}{10'} = \dfrac{0.7359 - 0.7353}{0.7373 - 0.7353}$

$\Rightarrow \dfrac{\theta - 47^\circ 20'}{10'} = \dfrac{0.0006}{0.0020} = \dfrac{6}{20} \Rightarrow \theta - 47^\circ 20' = \dfrac{6}{20} \times 10' = 3' \Rightarrow \theta = 47^\circ 20' + 3' = 47^\circ 23'$

2-4　廣義角的三角函數

例題 1

下列何者與 72° 互為同界角？

(A) 432°　(B) -432°　(C) 288°　(D) -288°　(E) -648°．

■：(A) ○：$432^\circ-72^\circ=360^\circ=1\times360^\circ$爲 360°之整數倍

(B) ×：$72^\circ-(-432^\circ)=504^\circ$不爲 360°之整數倍

(C) ×：$288^\circ-72^\circ=216^\circ$不爲 360°之整數倍

(D) ○：$72^\circ-(-288^\circ)=360^\circ=1\times360^\circ$爲 360°之整數倍

(E) ○：$72^\circ-(-648^\circ)=720^\circ=2\times360^\circ$爲 360°之整數倍，故選(A)(D)(E)

例題 2

下列何者正確？

(A) $\sin100^\circ>0$ (B) $\cos200^\circ>0$ (C) $\tan90^\circ$無意義(D) $\cot0^\circ$無意義(E) $\sin10^\circ<\tan10^\circ<\sec10^\circ$．

■：(A) ○：$\because\theta=100^\circ$爲第二象限角　$\therefore\sin100^\circ>0$

(B) ×：$\because\theta=200^\circ$爲第三象限角　$\therefore\cos200^\circ<0$

(C) ○：$\tan90^\circ$無意義

(D) ○：$\cot0^\circ$無意義

(E) ○：$0^\circ<\theta<90^\circ$ ⇨ $\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta$　　故選(A)(C)(D)(E)

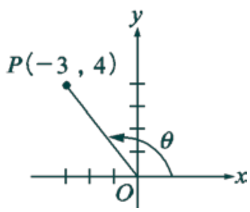
例題 3

設 θ 是第二象限角，且 $P(-3,4)$ 在 θ 的終邊上，則

$\sin\theta=$________，$\cos\theta=$________，$\tan\theta=$________．

■：$r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

故 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$



例題 4

設 $P(-5\sqrt{3},y)$ 為角 θ 終邊上一點，且 $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，則：

(1) $y=$________．　(2) $\cos\theta=$________．

■：(1) $\tan\theta=\dfrac{y}{-5\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⇨ $y=-5$，$r=\sqrt{(-5\sqrt{3})^2+y^2}=$ ，

(2) $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-5\sqrt{3}}{10}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例題 5

試求下列各式之值：

(1) $\sin150^\circ+\cos210^\circ+\tan225^\circ+\cot270^\circ+\sec300^\circ+\csc330^\circ$.

(2) $\cos330^\circ\tan750^\circ-\sin(-300^\circ)\cot510^\circ$.

(3) $\sin(180^\circ+\theta)\cos(90^\circ+\theta)+\sin(270^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$.

■：(1) 原式$=\cos60^\circ+(-\cos30^\circ)+\tan45^\circ+\dfrac{\cos270^\circ}{\sin270^\circ}+\csc30^\circ+\sec60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1+0+2-2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(2) 原式$=\sin60^\circ\tan30^\circ+(-\cos30^\circ)(-\tan60^\circ)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}+(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\times(-\sqrt{3})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2$

(3) 原式$=(-\sin\theta)(-\sin\theta)+(-\cos\theta)(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

例題 6

若 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ 且 $\tan\theta<0$，則 $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}=$______ .

■：$\because\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ 且 $\tan\theta<0$ $\therefore\theta$ 爲第二象限角

⇨ $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\cot\theta=-\dfrac{4}{3}$

原式$=\dfrac{-\frac{4}{5}}{1-(-\frac{3}{4})}+\dfrac{\frac{3}{5}}{1-(-\frac{4}{3})}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{7}{4}}+\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{3}}=-\dfrac{16}{35}+\dfrac{9}{35}=-\dfrac{7}{35}=-\dfrac{1}{5}$

例題 7

設 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$ 且 $180^\circ<\theta<270^\circ$，則：

(1) $\cos(180^\circ+\theta)=$____ . (2) $\cos(-630^\circ+\theta)=$____ . (3) $\tan(270^\circ-\theta)=$____ .

■：(1) $\cos(90^\circ\times2+\theta)=-\cos\theta=-(-\dfrac{12}{13})=\dfrac{12}{13}$

(2) $\cos(-630^\circ+\theta)=\cos(630^\circ-\theta)=\cos(90^\circ\times7-\theta)=-\sin\theta=-(-\dfrac{5}{13})=\dfrac{5}{13}$

(3) $\tan(270^\circ-\theta)=\tan(90^\circ\times3-\theta)=\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{-\dfrac{12}{13}}{-\dfrac{5}{13}}=\dfrac{12}{5}$

例題 8

設 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 為方程式 $5x^2+4x+k=0$ 之兩根，則實數 $k=$________。

■：由根與係數的關係知 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{5}$

⇨ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{16}{25}$ ⇨ $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$

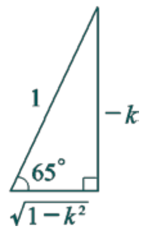
⇨ $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{16}{25}$ ⇨ $1+2\times\dfrac{k}{5}=\dfrac{16}{25}$ ⇨ $k=-\dfrac{9}{10}$

例題 9

設 $\sin(-65^\circ)=k$，試以 k 表示 $\tan(-2315^\circ)$。

■：$\sin(-65^\circ)=k$ ⇨ $\sin65^\circ=-k$，其中 $k<0$

故 $\tan(-2315^\circ)=-\tan2315^\circ=-\tan(90^\circ\times25+65^\circ)=\cot65^\circ=-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$



例題 10

下列敘述何者為真？（複選）

(A) $\sin50^\circ<\cos50^\circ$　(B) $\tan50^\circ<\cot50^\circ$　(C) $\tan50^\circ<\sec50^\circ$　(D) $\sin230^\circ<\cos230^\circ$

(E) $\tan230^\circ<\cot230^\circ$。　〔90.學測〕

■：(A) ╳：$\sin50^\circ>\sin40^\circ=\cos50^\circ$

(B) ╳：$\tan50^\circ>\tan40^\circ=\cot50^\circ$

(C) ○：$\tan50^\circ=\dfrac{\sin50^\circ}{\cos50^\circ}<\dfrac{1}{\cos50^\circ}=\sec50^\circ$

(D) ○：$\sin230^\circ=\sin(90^\circ\times2+50^\circ)=-\sin50^\circ$

$\cos230^\circ=\cos(90^\circ\times2+50^\circ)=-\cos50^\circ$

又 $\sin50^\circ>\cos50^\circ$　$\therefore\sin230^\circ<\cos230^\circ$

(E) ╳：$\tan230^\circ=\tan(90^\circ\times2+50^\circ)=\tan50^\circ$

$\cot230^\circ=\cot(90^\circ\times2+50^\circ)=\cot50^\circ$

又 $\tan50^\circ>\cot50^\circ$　$\therefore\tan230^\circ>\cot230^\circ$　故選(C)(D)