

1-1

指數

例題 1

試計算下列各式之值：

- (1) $(36)^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$. (2) $(625)^{-\frac{3}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) $(0.027)^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$. (4) $6^{\frac{1}{2}} \times 12^{-\frac{1}{4}} \div 27^{-\frac{1}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

■：(1) $(36)^{\frac{3}{2}} = (6^2)^{\frac{3}{2}} = 6^3 = 216$

(2) $(625)^{-\frac{3}{4}} = (5^4)^{-\frac{3}{4}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$

(3) $(0.027)^{\frac{2}{3}} = [(0.3)^3]^{\frac{2}{3}} = (0.3)^2 = 0.09$

(4) $6^{\frac{1}{2}} \times 12^{-\frac{1}{4}} \div 27^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{4}} \div (3^3)^{-\frac{1}{4}}$
 $= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{4}} \div 3^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})} \times 3^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{4}) - (-\frac{3}{4})} = 2^0 \times 3^1 = 1 \times 3 = 3$

例題 2

若 $13^x = 32$ ， $52^y = 256$ ，則 $\frac{5}{x} - \frac{8}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

■：∵ $13^x = 32 \Leftrightarrow 13 = 32^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{5}{x}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$52^y = 256 \Leftrightarrow 52 = 256^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{8}{y}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}}$ 得 $\frac{1}{4} = 2^{\frac{5}{x} - \frac{8}{y}} \Leftrightarrow 2^{-2} = 2^{\frac{5}{x} - \frac{8}{y}} \Leftrightarrow \frac{5}{x} - \frac{8}{y} = -2$

例題 3

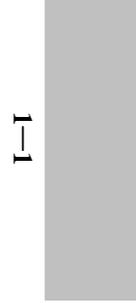
設 $a > 1$ ，若 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，試求下列各式之值：

- (1) $a + a^{-1}$. (2) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$. (3) $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}$.

■：(1) ∵ $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，平方得 $a + a^{-1} + 2 = 9 \Leftrightarrow a + a^{-1} = 7$

(2) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 + (a^{-\frac{1}{2}})^3$
 $= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}})^2 - a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} + (a^{-\frac{1}{2}})^2]$
 $= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a - 1 + a^{-1}) = 3 \times (7 - 1) = 18$

(3) $(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 4a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} = 3^2 - 4 \times 1 = 5$



$$\Rightarrow a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{5}, \text{ 但 } a > 1$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{2}} > 1, \text{ 而 } a^{-\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow \therefore a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

例題 4

設 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = 3$, 則 $a^{2x} =$ _____ .

$$\blacksquare : \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x})}{a^x + a^{-x}} = 3$$

$$\Rightarrow a^{2x} - 1 + a^{-2x} = 3$$

$$\Rightarrow a^{2x} - 4 + a^{-2x} = 0$$

$$\Rightarrow (a^{2x})^2 - 4(a^{2x}) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a^{2x} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

例題 5

下列 5 個數中，何者最小？

(A) $2^{\frac{2}{3}}$ (B) $4^{\frac{5}{2}} \times 8^{-1}$ (C) 2^{-1} (D) $(2^{-\frac{2}{9}})^9$ (E) $(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}$.

$$\blacksquare : \text{(B)} \quad 4^{\frac{5}{2}} \times 8^{-1} = (2^2)^{\frac{5}{2}} \times (2^3)^{-1} = 2^5 \times 2^{-3} = 2^2$$

$$\text{(D)} \quad (2^{-\frac{2}{9}})^9 = 2^{-2}$$

$$\text{(E)} \quad (\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}} = (2^{-1})^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \text{底數 } 2 > 1 \text{ 且 } 2 > \frac{4}{3} > \frac{2}{3} > -1 > -2$$

$$\therefore 2^2 > 2^{\frac{4}{3}} > 2^{\frac{2}{3}} > 2^{-1} > 2^{-2}$$

例題 6

試解下列各方程式：

(1) $(2^x)^2 = 64$.

(2) $2^{x^2} = 64$.

(3) $(\sqrt{0.1})^{3x-2} = 10^{-2x+3}$.

(4) $2^{5x+3} \cdot (\frac{1}{2})^{4x+8} = (\frac{1}{4})^{3x^2}$.

- : (1) $(2^x)^2 = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$
 (2) $2^{x^2} = 64 \Leftrightarrow 2^{x^2} = 2^6 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$
 (3) $(\sqrt{0.1})^{3x-2} = 10^{-2x+3} \Leftrightarrow (10^{-1})^{\frac{3x-2}{2}} = 10^{-2x+3}$
 $\Leftrightarrow 10^{\frac{-3x+2}{2}} = 10^{-2x+3} \Leftrightarrow \frac{-3x+2}{2} = -2x+3$
 $\Leftrightarrow -3x+2 = -4x+6 \Leftrightarrow x = 4$
 (4) $2^{5x+3} \cdot (\frac{1}{2})^{4x+8} = (\frac{1}{4})^{3x^2} \Leftrightarrow 2^{5x+3} \cdot 2^{-4x-8} = 2^{-6x^2}$
 $\Leftrightarrow 2^{x-5} = 2^{-6x^2} \Leftrightarrow x-5 = -6x^2$
 $\Leftrightarrow 6x^2+x-5=0 \Leftrightarrow (6x-5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \text{ 或 } -1$

例題 7

試解下列各方程式：

- (1) $6^x - 2^x - 4 \times 3^x + 4 = 0$. (2) $3^{2x} - 6 \times 3^x - 27 = 0$.

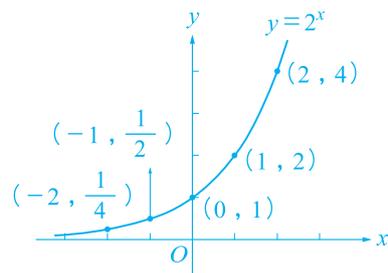
- : (1) $6^x - 2^x - 4 \times 3^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x \times 3^x - 2^x - 4 \times 3^x + 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (2^x - 4)(3^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \text{ 或 } 3^x = 1$
 $\Leftrightarrow x = 2 \text{ 或 } x = 0$
 (2) $3^{2x} - 6 \times 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \times 3^x - 27 = 0$
 $\Leftrightarrow (3^x + 3)(3^x - 9) = 0$
 $\because 3^x + 3 \text{ 恆正}$
 $\therefore 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$

例題 1

試描繪 $y=2^x$ 的圖形。

■：先列出若干點坐標

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y=2^x$...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...

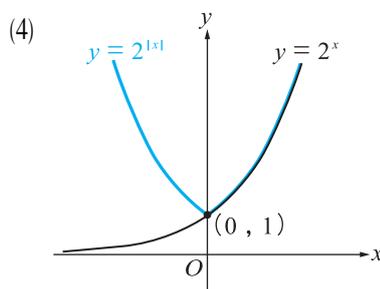
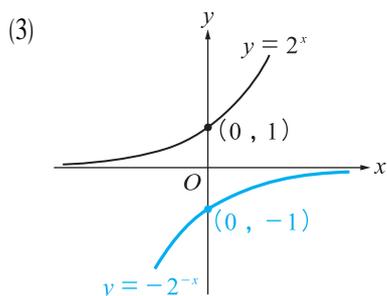
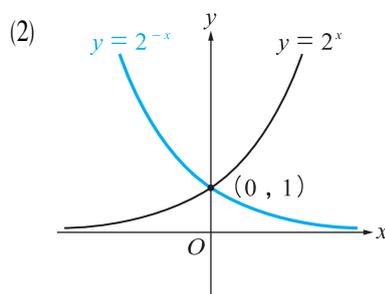
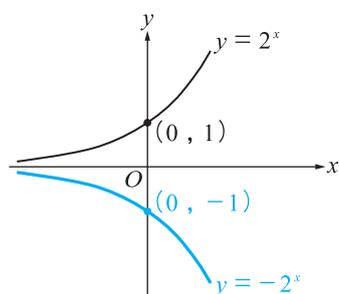


例題 2

試利用 $y=2^x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形：

- (1) $y=-2^x$. (2) $y=2^{-x}$. (3) $y=-2^{-x}$. (4) $y=2^{|x|}$.

■：(1)

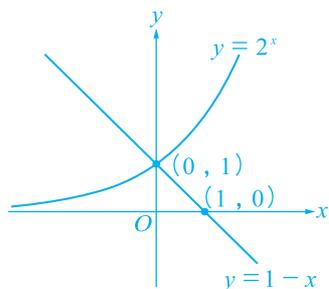


例題 3

試問方程式 $2^x+x-1=0$ 有_____個實根。

■： $2^x+x-1=0$ 之實根個數

即為 $\begin{cases} y=2^x \\ y=1-x \end{cases}$ 之交點數



由上圖知有 1 個交點

亦即方程式 $2^x + x - 1 = 0$ 恰有 1 個實根

例題 4

函數 $y = 4^x$ 與 $y = 2^{3x+2}$ 的圖形之交點坐標為_____。

■：由 $\begin{cases} y = 4^x \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = 2^{3x+2} \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

得 $4^x = 2^{3x+2} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{3x+2} \Leftrightarrow 2x = 3x+2 \Leftrightarrow x = -2$

代入①得 $y = 4^{-2} = \frac{1}{16}$ ，故交點坐標為 $(-2, \frac{1}{16})$

例題 5

陳先生三年前買了一輛剛出廠的新車買價 100 萬元；該汽車的價值在第一年後折舊 20%，第二年以後每年折舊前一年車價的 15%。陳先生現在想用這部車換新車，試問舊車可抵_____萬元。(萬元以下四捨五入) [98.指考乙]

■：100 萬 $\times (1 - 20\%) \times (1 - 15\%) \times (1 - 15\%) = 100 \text{ 萬} \times 0.8 \times 0.85 \times 0.85$
 $= 57.8 \text{ 萬} \approx 58 \text{ 萬}$

例題 6

某地價的房屋折舊價格為第一年折舊 10%，往後每年折舊 5%。若一棟全新房屋以 1000 萬元售出，則 10 年後該屋的價格為_____。(0.95⁹ \approx 0.630)

■：設 $f(t)$ 為 t 年後的折舊價格

則 $f(t) = 1000 \times 0.9 \times (0.95)^{t-1}$, $t \geq 2$

$f(10) = 1000 \times 0.9 \times (0.95)^9 \approx 1000 \times 0.9 \times 0.630 = 567$

故 10 年後此屋的折舊價格是 567 萬元

例題 7

地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約

增加為原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100000 倍，依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。

(A) 10 倍 (B) 100 倍 (C) 1000 倍 (D) 10000 倍。 [94.指考甲]

■：設芮氏等級相差 x 級，則 $32^x \approx 100000$

$$\text{又 } 32^3 = 32768, 32^4 = 1048576$$

$\therefore x$ 較接近 3，故強度約相差 $10^3 = 1000$ 倍 故選(C)

例題 8

某實驗室培育細菌有 1000 個，假設每過一日細菌數增加一倍，試問：

(1) 10 日後，細菌總數有 _____ 個。

(2) _____ 日後，細菌總數會超過 10000000 個。

■：依題意，細菌數是以公比為 2 的等比數列成長

$$\text{設 } t \text{ 日後細菌數是 } f(t) = 1000 \cdot 2^t$$

$$(1) \text{ 10 日後, } f(10) = 1000 \cdot 2^{10} = 1024000 \text{ (個)}$$

$$(2) 1000 \cdot 2^t > 10000000 \Leftrightarrow 2^t > 10000$$

$$\therefore 2^{13} = 8192, 2^{14} = 16384$$

故 14 日後，總細菌數會超過 10000000 個

例題 9

對任意實數 x 而言， $27^{(x^2 + \frac{2}{3})}$ 的最小值為

(A) 3 (B) $3\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 27 (E) $81\sqrt{3}$ 。

[97.學測]

■： $\because x^2 \geq 0 \therefore x^2 + \frac{2}{3}$ 的最小值為 $\frac{2}{3}$

$\therefore 27^{(x^2 + \frac{2}{3})}$ 的最小值為 $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$ ，故選(C)

例題 10

試解下列各不等式：

$$(1) 10^{x^2 - 2x} > 1000.$$

$$(2) (0.1)^{x^2 - 2x} > 0.001.$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq 16 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

$$(4) 9^x + 3^x - 2 \geq 0.$$

■：(1) $10^{x^2 - 2x} > 1000 \Leftrightarrow 10^{x^2 - 2x} > 10^3$

$$\therefore \text{底數 } 10 > 1 \quad \therefore x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ 或 } x < -1$$

$$(2) (0.1)^{x^2 - 2x} > 0.001 \Leftrightarrow (0.1)^{x^2 - 2x} > (0.1)^3$$

$$\because \text{底數 } 0 < 0.1 < 1 \quad \therefore x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

$$(3) \text{ 原式 } \Leftrightarrow 2^{-x-1} \leq 2^4 \leq 2^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow -x-1 \leq 4 \leq -2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \leq 4 \\ 4 \leq -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq -2$$

$$(4) 9^x + 3^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + (3^x) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x + 2)(3^x - 1) \geq 0$$

$$\because 3^x + 2 > 0 \text{ 恆成立} \quad \therefore 3^x \geq 1 = 3^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

例題 11

設 $-3 \leq x \leq 2$ ，則 $f(x) = 4^{x+1} - 2^{x+1}$ 之最大值為 _____，最小值為 _____。

$$\begin{aligned} \blacksquare : f(x) &= 4^{x+1} - 2^{x+1} \\ &= 4 \times 4^x - 2 \times 2^x \\ &= 4 \times (2^x)^2 - 2 \times (2^x) \\ &= 4 \times \left(2^x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\because -3 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2^{-3} \leq 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq 2^x \leq 4$$

\therefore 當 $2^x = 4$ ，亦即 $x = 2$ 時， $f(x)$ 有最大值 $4 \times 4^2 - 2 \times 4 = 56$

當 $2^x = \frac{1}{4}$ ，亦即 $x = -2$ 時， $f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{4}$

例題 1

試計算下列各式之值：

(1) $\log_2 32$. (2) $\log_2 \frac{1}{8}$. (3) $\log_5 1$.

■：(1) $\because 2^5 = 32 \quad \therefore \log_2 32 = 5$

(2) $\because 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \therefore \log_2 \frac{1}{8} = -3$

(3) $\because 5^0 = 1 \quad \therefore \log_5 1 = 0$

例題 2

(1) 若 $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ ，則 $x =$ _____ .

(2) 若 $\log_x \frac{1}{2} = -1$ ，則 $x =$ _____ .

(3) 若 $\log_{\frac{1}{16}} x = -0.75$ ，則 $x =$ _____ .

(4) 若 $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{16} x) = 2$ ，則 $x =$ _____ .

■：(1) $\log_x 8 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = 8 = 2^3 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$

(2) $\log_x \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x = 2$

(3) $\log_{\frac{1}{16}} x = -0.75 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} = (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{16} x) = 2 \Leftrightarrow \log_{16} x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

例題 3

若對數 $\log_{(x+1)} (3x^2 + x - 10)$ 有意義，則 x 的範圍為 _____ .

■：由定義知底數大於 0 且不等於 1 $\Leftrightarrow x+1 > 0$ 且 $x+1 \neq 1$

$\Leftrightarrow x > -1$ 且 $x \neq 0$ ①

又真數大於 0 $\Leftrightarrow 3x^2 + x - 10 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(3x-5) > 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ 或 $x < -2$ ②

由①、②得 $x > \frac{5}{3}$

$$= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.4771) = \frac{1}{2} \times 0.7781 = 0.38905$$

例題 7

試求下列各式之值：

(1) $\log \frac{7}{36} + 2 \log 3 - \log \frac{7}{25} + 4 \log 2$. (2) $\log_3 54 - 2 \log_3 2 + \log_3 6$.

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 2 + \log_9 \frac{1}{8})$. (4) $(\log_3 5)(\log_{25} 7)(\log_7 81)$.

■：(1) 原式 = $\log \frac{7}{36} + \log 9 - \log \frac{7}{25} + \log 16 = \log (\frac{7}{36} \times \frac{9}{1} \times \frac{25}{7} \times \frac{16}{1}) = \log 100 = 2$

(2) 原式 = $\log_3 54 - \log_3 4 + \log_3 6 = \log_3 (54 \times \frac{1}{4} \times 6) = \log_3 81 = 4$

(3) 原式 = $(\log_2 3 + \log_2 3^2)(\log_3 2 + \log_3 2^{-3}) = (\log_2 3 + \frac{2}{2} \log_2 3)(\log_3 2 + \frac{-3}{2} \log_3 2)$
 $= (2 \log_2 3)(-\frac{1}{2} \log_3 2) = -1$

(4) 原式 = $(\log_3 5)(\frac{1}{2} \log_5 7)(4 \log_7 3) = \frac{4}{2} \times \log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 3 = 2 \log_3 3 = 2$

例題 8

設 $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$, 試以 a, b 表示下列各式之值：

(1) $\log_2 7$. (2) $\log_{14} 84$.

■：(1) $\log_2 7 = (\log_2 3)(\log_3 7) = ab$

(2) $\log_{14} 84 = \frac{\log_2 84}{\log_2 14} = \frac{2 \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{2 + a + ab}{1 + ab}$

例題 9

試解下列各方程式：

(1) $1 + \log_4 (x-1) = \log_2 (x-9)$. (2) $2 \log_3 x - 6 \log_x 3 - 1 = 0$.

■：(1) \because 真數 $> 0 \therefore \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-9 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 9 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

又 $1 + \log_4 (x-1) = \log_2 (x-9) \Rightarrow \log_4 4 + \log_4 (x-1) = \log_4 (x-9)^2$
 $\Rightarrow \log_4 [4(x-1)] = \log_4 (x-9)^2 \Rightarrow 4(x-1) = (x-9)^2 \Rightarrow x^2 - 22x + 85 = 0$
 $\Rightarrow (x-5)(x-17) = 0 \therefore x = 5 \text{ 或 } 17 \dots\dots\dots \textcircled{2}$

由①、②知 $x=17$

$$(2) \text{ 原式} = 2 \log_3 x - 6x \frac{1}{\log_3 x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - (\log_3 x) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x - 2)(2 \log_3 x + 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \text{ 或 } \log_3 x = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3^2 = 9 \text{ 或 } x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}, \text{ 故 } x = 9 \text{ 或 } x = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

例題 10

設 α, β 為方程式 $(\log 2x)(\log 3x) = 1$ 之兩根，則 $\alpha\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\blacksquare : (\log 2x)(\log 3x) = 1 \Leftrightarrow (\log 2 + \log x)(\log 3 + \log x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\log x)^2 + (\log 2 + \log 3)\log x + (\log 2 \cdot \log 3 - 1) = 0 \text{ 兩根為 } \alpha, \beta$$

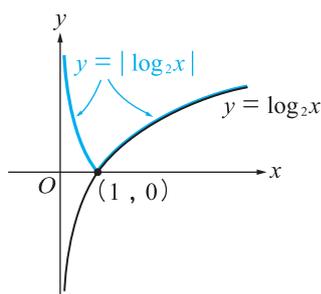
$$\text{令 } \log x = A, \text{ 則 } A^2 + (\log 2 + \log 3)A + (\log 2 \cdot \log 3 - 1) = 0 \text{ 兩根為 } \log \alpha, \log \beta$$

$$\therefore \text{兩根和 } \log \alpha + \log \beta = -(\log 2 + \log 3)$$

$$\Leftrightarrow \log(\alpha\beta) = -\log 6 = \log \frac{1}{6}, \text{ 故 } \alpha\beta = \frac{1}{6}$$

(5) $y = |\log_2 x|$

\Rightarrow 當 $\log_2 x \geq 0$, 亦即 $x \geq 1$ 時 $y = \log_2 x$
 \Rightarrow 當 $\log_2 x < 0$, 亦即 $0 < x < 1$ 時 $y = -\log_2 x$



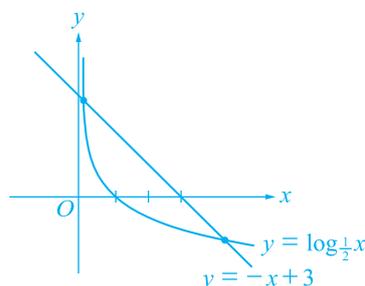
例題 3

試利用圖形說明方程式 $-x+3 = \log_{\frac{1}{2}} x$ 有多少個實根？

■：欲求 $-x+3 = \log_{\frac{1}{2}} x$ 之實根數，即求

$$\begin{cases} y = -x+3 \\ y = \log_{\frac{1}{2}} x \end{cases} \text{ 之交點數，由圖形知有 2 個交點}$$

故方程式 $-x+3 = \log_{\frac{1}{2}} x$ 有 2 個實根



例題 4

若 (a, b) 是對數函數 $y = \log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？

- (A) $(1, 0)$ (B) $(10a, b+1)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $(\frac{1}{a}, 1-b)$ (E) $(a^2, 2b)$.

[98.指考乙]

■：由題意知 $\log a = b$

(A) ○： $\log 1 = 0 \quad \therefore (1, 0)$ 在 $y = \log x$ 上

(B) ○： $\therefore \log(10a) = \log 10 + \log a = 1 + \log a = 1 + b \quad \therefore (10a, b+1)$ 在 $y = \log x$ 上

(C) ×： $\log(2a) = \log 2 + \log a = \log 2 + b$

(D) ×： $\log \frac{1}{a} = -\log a = -b$

(E) ○： $\therefore \log a^2 = 2 \log a = 2b \quad \therefore (a^2, 2b)$ 在 $y = \log x$ 上

例題 5

已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, 試比較 12^{30} 與 18^{25} 之大小。

■： $\log 12^{30} = 30 \log 12 = 30(2 \log 2 + \log 3)$

$$\begin{aligned}
 &= 30 \times (2 \times 0.3010 + 0.4771) = 32.373 \\
 \log 18^{25} &= 25 \log 18 = 25 (\log 2 + 2 \log 3) \\
 &= 25 (0.3010 + 2 \times 0.4771) = 31.38 \\
 \therefore 32.373 > 31.38 &\Leftrightarrow \log 12^{30} > \log 18^{25}, \text{ 故 } 12^{30} > 18^{25}
 \end{aligned}$$

例題 6

試比較 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 2$, $d = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ 之大小。

■ : $a = \log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3 < -\log_2 2 = -1$

$$b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \frac{-1}{-1} \log_2 3 = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$$

$$c = \log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_3 2 > -\log_3 3 = -1$$

$$d = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \frac{-1}{-1} \log_3 2 = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$$

由以上可知 $b > 1 > d > 0 > c > -1 > a \Leftrightarrow b > d > c > a$

例題 7

已知 $\log 2 = 0.3010$, 若 $(\frac{5}{2})^n > 1000$, 則 n 的最小自然數為_____。

■ : $(\frac{5}{2})^n > 1000 \Leftrightarrow n \log \frac{5}{2} > \log 1000$

$$\Leftrightarrow n(\log 5 - \log 2) > 3$$

$$\Leftrightarrow n \times (0.6990 - 0.3010) > 3$$

$$\Leftrightarrow n \times 0.3980 > 3$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{0.3980} \approx 7.54 \quad \therefore n \text{ 的最小自然數為 } 8$$

例題 8

設 $0 \leq x \leq 4$, $f(x) = \log(x^2 - 6x + 10)$ 之最小值 $m =$ _____, 最大值 $M =$ _____。

■ : $f(x) = \log(x^2 - 6x + 10) = \log[(x-3)^2 + 1]$

又 $\because 0 \leq x \leq 4$ 故當 $x=3$ 時, $f(x)$ 有最小值 $m = \log 1 = 0$

當 $x=0$ 時, $f(x)$ 有最大值 $M = \log 10 = 1$

例題 9

試求下列各不等式之解：

(1) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x) < 1$.

(2) $\log_3(x^2+x-2) < 1$.

(3) $\log_2(x+1) \leq 1 + \log_4(x+2)$.

■ : (1) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$

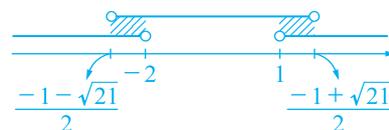
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 < x < \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < 1$$

(2) \because 真數 $x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) > 0$
 $\Leftrightarrow x > 1$ 或 $x < -2$ ①

又 $\log_3(x^2+x-2) < 1$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2 < 3 \Leftrightarrow x^2+x-5 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{②}$$



由①、②知 $\frac{-1-\sqrt{21}}{2} < x < -2$ 或 $1 < x < \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

(3) \because 真數 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$ ①

又 $\log_2(x+1) \leq 1 + \log_4(x+2)$

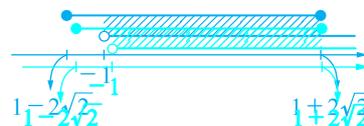
$$\Leftrightarrow \log_4(x+1)^2 \leq \log_4 4 + \log_4(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+1)^2 \leq \log_4[4(x+2)]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4x+8 \Leftrightarrow x^2-2x-7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} \leq x \leq 1+2\sqrt{2} \text{②}$$

由①、②得 $-1 < x \leq 1+2\sqrt{2}$



1-5

查表與內插法

例題 1

若已知 $\log 6.23 = 0.7945$ ，則：

- (1) $\log 62300 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) $\log 0.00623 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) 若 $\log x = 2.7945$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 若 $\log y = -1.2055$ ，則 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

■：(1) $\log 62300 = \log(6.23 \times 10^4) = \log 6.23 + \log 10^4$
 $= 4 + \log 6.23 = 4 + 0.7945 = 4.7945$

(2) $\log 0.00623 = \log(6.23 \times 10^{-3}) = \log 6.23 + \log 10^{-3}$
 $= -3 + \log 6.23 = -3 + 0.7945 = -2.2055$

(3) $\log x = 2.7945 = 0.7945 + 2 = \log 6.23 + \log 100 = \log 623 \quad \therefore x = 623$

(4) $\log y = -1.2055 = 0.7945 - 2 = \log 6.23 + \log 0.01 = \log 0.0623 \quad \therefore y = 0.0623$

例題 4

若 $x = \frac{\sqrt[3]{88.3}}{\sqrt{2.56}}$ ，試利用下列對數表，求出 x 的近似值為

- (A) $2.73 < x < 2.74$ (B) $2.74 < x < 2.75$ (C) $2.75 < x < 2.76$ (D) $2.77 < x < 2.78$
 (E) $2.78 < x < 2.79$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489

■： $\log x = \frac{1}{3} (\log 88.3) - \frac{1}{2} (\log 2.56) = \frac{1}{3} (1 + \log 8.83) - \frac{1}{2} (\log 2.56)$
 $= \frac{1}{3} (1 + 0.9460) - \frac{1}{2} (0.4082) \approx 0.4446$

$\therefore \log 2.78 < \log x < \log 2.79$

第 章 綜合練習

1. 設 $-1 \leq x \leq 0$ ，若 $f(x) = 2^{x+2} - 3 \times 4^x - 1$ ，則 $f(x)$ 之最大值為_____，最小值為_____。

■：令 $t = 2^x$

$$\because -1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 2^{-1} \leq 2^x \leq 2^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= 2^{x+2} - 3 \times 4^x - 1 = 4t - 3t^2 - 1 \\ &= -3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} - 1 = -3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

故當 $t = \frac{2}{3}$ ，亦即 $2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{2}{3}$ 時， $f(x)$ 有最大值 $\frac{1}{3}$

當 $t = 1$ ，亦即 $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ 時， $f(x)$ 有最小值 0

2. 若 $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 8 = 0$ 之兩根為 α ， β ，則 $\alpha + \beta =$ _____。

■： $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 12 \times (2^x) + 8 = 0 \text{ 之兩根為 } \alpha, \beta$$

令 $2^x = A$

$$\Leftrightarrow A^2 - 12A + 8 = 0 \text{ 之兩根為 } 2^\alpha, 2^\beta$$

$$\Leftrightarrow \text{兩根積 } 2^\alpha \times 2^\beta = 8 \Leftrightarrow 2^{\alpha+\beta} = 2^3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$$

3. 設 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt[3]{3}$ ， $c = \sqrt[5]{5}$ ，則 a, b, c 之大小順序為_____。

$$\blacksquare: \log a = \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2 \approx \frac{1}{2} \times 0.3010 = 0.1505$$

$$\log b = \log \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3} \log 3 \approx \frac{1}{3} \times 0.4771 \approx 0.1590$$

$$\log c = \log \sqrt[5]{5} = \frac{1}{5} \log 5 \approx \frac{1}{5} \times 0.6990 = 0.1398$$

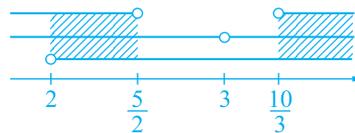
$$\therefore \log b > \log a > \log c \quad \therefore b > a > c$$

4. 若 $\log_{x-2}(6x^2 - 35x + 50)$ 有意義，則 x 之範圍為_____。

■： $\log_{x-2}(6x^2 - 35x + 50)$ 有意義

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \\ 6x^2-35x+50 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \\ x > \frac{10}{3} \text{ 或 } x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore 2 < x < \frac{5}{2} \text{ 或 } x > \frac{10}{3}$$



5. 若方程式 $4x^2+2x-1=0$ 之兩根為 $\log a$, $\log b$, 則

(A) $\log a + \log b = \frac{1}{2}$ (B) $\log a \times \log b = \frac{1}{4}$ (C) $ab = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $(\log_a b)(\log_b a) = 1$

(E) $\log_a b + \log_b a = 1$.

■ : (A) \times : $\log a + \log b = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(B) \times : $\log a \times \log b = -\frac{1}{4}$

(C) \circ : $\therefore \log a + \log b = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log(ab) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow ab = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(D) \circ : $(\log_a b)(\log_b a) = \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log a}{\log b} = 1$

(E) \times : $\log_a b + \log_b a = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b}$

$$= \frac{(\log a)^2 + (\log b)^2}{\log a \cdot \log b} = \frac{(\log a + \log b)^2 - 2 \log a \cdot \log b}{\log a \cdot \log b}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}} = -3$$

6. 已知 $\log 2 = 0.3010$, 若 $4000 < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 5000$, 則正整數 $n =$ _____ .

■ : $4000 < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 5000$

$\Leftrightarrow \log 4000 < \log \left(\frac{5}{4}\right)^n < \log 5000$

$\Leftrightarrow 3 + 2 \log 2 < n(\log 5 - \log 4) < 3 + \log 5$

$\Leftrightarrow 3.6020 < n \times 0.097 < 3.6990$

$$\Rightarrow \frac{3.6020}{0.097} < n < \frac{3.6990}{0.097}$$

$$\Rightarrow 37.13\cdots < n < 38.13\cdots \quad \text{故 } n=38$$

7. 已知 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, 則:

(1) 9^{30} 為_____位數. (2) $(\frac{2}{3})^{20}$ 在小數點後第_____位開始不為 0.

$$\blacksquare : (1) \log 9^{30} = \log (3^2)^{30} = \log 3^{60} = 60 \log 3$$

$$= 60 \times 0.4771 = 28.626$$

$\therefore \log 9^{30}$ 首數為 28, 故 9^{30} 為 29 位數

$$(2) \log \left(\frac{2}{3}\right)^{20} = 20 \log \frac{2}{3} = 20(\log 2 - \log 3)$$

$$= 20 \times (0.3010 - 0.4771) = -3.522$$

$$= -4 + 0.478$$

$\therefore \log \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ 首數為 -4, 故 $(\frac{2}{3})^{20}$ 在小數點後第 4 位開始不為 0

8. 設 $y = \log_a(x+2)$ 之圖形如右且通過 $(1, 2)$,

$(b, 0)$, $(7, c)$, 則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

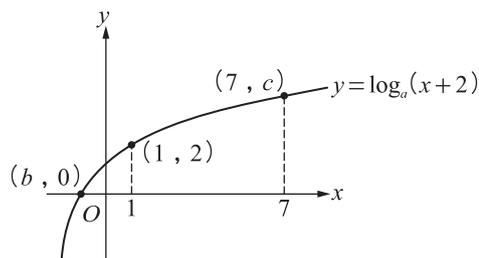
$\blacksquare : \because$ 過點 $(1, 2)$

$$\therefore 2 = \log_a 3 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$$

\because 過點 $(b, 0)$

$$\therefore \log_{\sqrt{3}}(b+2) = 0 \Leftrightarrow b+2 = 1 \Leftrightarrow b = -1$$

$$\because \text{過點 } (7, c) \quad \therefore \log_{\sqrt{3}} 9 = c \Leftrightarrow c = 4$$



9. 設實數 x 滿足 $0 < x < 1$ 且 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$, 則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

[96.學測]

$\blacksquare : \because$ 真數 $> 0 \quad \therefore x > 0$

$$\text{又 } \log_x 4 - \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_x 2^2 - \log_2 x = 1 \Leftrightarrow 2 \log_x 2 - \log_2 x = 1$$

$$\text{令 } \log_2 x = A, \text{ 則 } \log_x 2 = \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{A} - A = 1 \Leftrightarrow A^2 + A - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A+2)(A-1) = 0 \Leftrightarrow A = -2 \text{ 或 } A = 1$$

$$\therefore \log_2 x = -2 \text{ 或 } \log_2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \text{ 或 } x = 2^1 = 2$$

$$\text{又 } 0 < x < 1, \text{ 故 } x = \frac{1}{4}$$

10. 某食品實驗室混合甲、乙兩種菌類製成一種新食品。調查發現乙菌個數達到甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加一倍（成為原來的兩倍），乙菌增加三倍（成為原本的四倍）。現在取同數量的甲、乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第_____天後混和甲、乙兩種菌類時，才能製成受歡迎的食品。

■：設至少要 n 天

$$\frac{\text{乙菌個數}}{\text{甲菌個數}} = \frac{4^n}{2^n} = 2^n > 1000$$

$$\text{又 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \quad \therefore n = 10$$

故至少第 10 天後才能製成受歡迎的食品