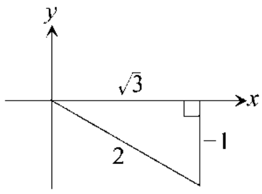
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：99.08.07					
範圍	3-5 複數極式	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1.複數平面上，直角坐標為$(2\sin\frac{2\pi}{3}$，$2\cos\frac{2\pi}{3})$的點，其極坐標可為

(A)$[2$，$\frac{2\pi}{3}]$　(B)$[2$，$\frac{\pi}{3}]$　(C)$[2$，$\frac{\pi}{6}]$　(D)$[2$，$-\frac{\pi}{6}]$　(E)$[2$，$\frac{5\pi}{6}]$



【解答】(D)

【詳解】

$(2\sin\frac{2\pi}{3}$，$2\cos\frac{2\pi}{3}) = (\sqrt{3}$，$-1)$　$\therefore$　$[r$，$\theta] = [2$，$-\frac{\pi}{6}]$

2.$(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{10} =$ (A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-i$　(E) 0

【解答】(D)

【詳解】

$(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{10} = (\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^{10} = \cos\frac{35\pi}{2} + i\sin\frac{35\pi}{2} = -i$

5.複數平面上，滿足 $z^{13} = 7 + 8i$ 的一切複數 z 的圖形為

(A)一直線　(B)一個圓　(C)一點　(D)正 13 邊形　(E)13 個點

【解答】(E)

【詳解】

$z^{13} = 7 + 8i = \sqrt{113}(\cos\theta + i\sin\theta)$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$　$\therefore$　$\alpha = \sqrt[26]{113}(\cos\frac{\theta}{13} + i\sin\frac{\theta}{13})$ 為其一根

$\therefore$　$z^{13} = 7 + 8i$ 的 13 個根為α，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2$，$\cdots$，$\alpha\omega^{12}$（$\omega = \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}$）

此 13 個根在複數平面的圖形為正 13 邊形的 13 個頂點

4.設 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，則下列何者為真？

(A) $z_1 + z_2 = (r_1 + r_2)[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$　(B) $z_1 + z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$　(C) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\theta_1\theta_2 + i\sin\theta_1\theta_2)$　(D) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$　(E)以上皆非

【解答】(D)

二、多重選擇題(每題 10 分)

1.方程式 $x^5 = \cos10° + i\sin10°$的五個根的主輻角θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5 且$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$，則

(A) $\theta_2 = 74°$　(B) $\theta_4 = 218°$　(C) $\sin\theta_i \neq 0$，$i = 1$，2，3，4，5

(D) $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \cos\theta_4 + \cos\theta_5 = 1$　(E) $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4 + \sin\theta_5 = 0$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(1) $x^5 = \cos10° + i\sin10°$　$\therefore$　$x = \cos2° + i\sin2°$，$\cos74° + i\sin74°$，$\cos146° + i\sin146°$

$\cos218° + i\sin218°$，$\cos290° + i\sin290°$

$\Rightarrow$　$\theta_1 = 2°$，$\theta_2 = 74°$，$\theta_3 = 146°$，$\theta_4 = 218°$，$\theta_5 = 290°$

(2)$\therefore$　$\sin\theta_i \neq 0$

(3)原方程式的五根和$(\cos2° + \cos74° + \cos146° + \cos218° + \cos290°)+ i(\sin2° + \sin74° + \sin146° + \sin218° + \sin290°) = 0$

$\Rightarrow$　$\cos2° + \cos74° + \cos146° + \cos218° + \cos290° = 0$

$\sin2° + \sin74° + \sin146° + \sin218° + \sin290° = 0$

$\Rightarrow$　$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \cos\theta_4 + \cos\theta_5 = 0$

$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4 + \sin\theta_5 = 0$

2.設 $u = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$，下列各敘述何者正確？

(A) u 爲 $x^3 - 1 = 0$ 之一根　(B) $u^{11} = u^{71}$　(C) $u^6 + u^7 + \cdots + u^{24} = 1$　(D) $\overline{u} = \frac{1}{u}$

(E)在複數平面上，以點 u^1，u^2，u^3 作一三角形，則此三角形之面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

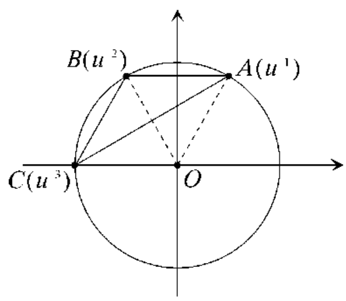
(A) $u^3 - 1 = \cos\pi + i\sin\pi - 1 = -2 \neq 0$　$\therefore$　u 不爲 $x^3 - 1 = 0$ 之一根

(B) $u^3 = -1$　$\therefore$　$u^{11} = -u^2 = u^{71}$

(C) $u^6 + u^7 + \cdots + u^{24} = \frac{u^6(u^{19} - 1)}{u - 1} = \frac{1 \cdot (u - 1)}{u - 1} = 1$

(D) $\overline{u} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$，$\frac{1}{u} = u^{-1} = \cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$　$\therefore$　$\overline{u} = \frac{1}{u}$

(E) $\begin{cases} u^1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ u^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ u^3 = \cos\pi + i\sin\pi \end{cases}$



$\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC - \triangle AOC$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin60° + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin60° - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin120° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3.若 $x^5 = 1$ 有 5 個根，1，ω，ω^2，ω^3，ω^4，且 $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$，則下列各敘述何者爲正確？

(A) $\omega^{90} = 1$　(B) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$　(C)$(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^3)(1 - \omega^4) = 5$

(D) $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\omega^2}+\dfrac{1}{1-\omega^3}+\dfrac{1}{1-\omega^4}=2$　(E) $1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+\cdots+100\omega^{99}=0$

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

1，ω，ω^2，ω^3，ω^4 為 $x^5-1=0$ 的 5 個根，故 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$，且 $\omega^5=1$

(A) $\omega^{90}=(\omega^5)^{18}=1^{18}=1$

(B) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

(C)因為 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4 為 $x^5-1=0$ 的 5 個根

故 $x^5-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$

又 $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

比較兩式 $(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=x^4+x^3+x^2+x+1$

$x=1$ 代入 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$

(D) $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\omega^2}+\dfrac{1}{1-\omega^3}+\dfrac{1}{1-\omega^4}=(\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\omega^4})+(\dfrac{1}{1-\omega^2}+\dfrac{1}{1-\omega^3})$

$$=\frac{1-\omega^4+1-\omega}{1-\omega-\omega^4+\omega^5}+\frac{1-\omega^3+1-\omega^2}{1-\omega^2-\omega^3+\omega^5}=\frac{2-\omega-\omega^4}{2-\omega-\omega^4}+\frac{2-\omega^2-\omega^3}{2-\omega^2-\omega^3}=1+1=2$$

(E)
$$\begin{array}{rrl} & P= & 1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+\cdots+100\omega^{999} \\ -) & \omega P= & \omega+2\omega^2+3\omega^3+\cdots+99\omega^{99}+100\omega^{100} \\ \hline & (1-\omega)P= & \omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{99}-100\omega^{100} \end{array}$$
$$=\frac{1\cdot(1-\omega^{100})}{1-\omega}-100\omega^{100}=-100$$

$\therefore$　$P=\dfrac{-100}{1-\omega}=\dfrac{100}{\omega-1}$

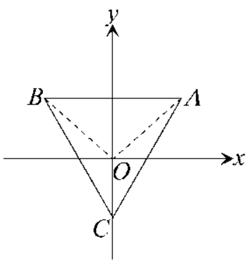
4.設 $z^3=i$ 的三個根 α，β，γ 在複數平面上的對應點為 A，B，C，則

(A) $\overline{AB}$ 的長為 $\sqrt{3}$　(B) $\triangle ABC$ 的周長為 $3\sqrt{3}$　(C) $\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(D) $\alpha+\beta+\gamma=0$

(E) $\alpha\beta\gamma=-i$

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】



(1)　$z^3=i=\cos90°+i\sin90°$

$\Rightarrow$　$z=\cos30°+i\sin30°$，$\cos150°+i\sin150°$，$\cos270°+i\sin270°$

(2) $\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\angle AOB=120°$

$\Rightarrow$　$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos120°=3$　$\Rightarrow$　$\overline{AB}=\sqrt{3}$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 周長 $= 3\overline{AB} = 3\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 面積 $= 3\triangle OAB = 3(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120°) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(3) $z^3 = i$ 的三根和為 0 $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma = 0$，三根積為 i $\Rightarrow$ $\alpha\beta\gamma = i$

5.設$\alpha \in C$，$\alpha \neq 0$，$|\alpha| = 1$ 且α 的主輻角為 199°，則下列敘述，何者正確？

(A) $2000\overline{\alpha}$的主輻角是 161° (B) -91α 的主輻角是 19° (C) $-17\overline{\alpha}$的主輻角是 341°

(D)$\frac{1}{\alpha}$的主輻角是 161° (E) α^2的主輻角是 38°

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

令$\alpha = \cos 199° + i\sin 199°$

(A) $2000\overline{\alpha} = 2000(\cos 199° - i\sin 199°) = 2000[\cos(-199°) + i\sin(-199°)]$

$= 2000[\cos(360° - 199°) + i\sin(360° - 199°)] = 2000(\cos 161° + i\sin 161°)$，

主輻角是 161°

(B) $-91\alpha = 91(-\cos 199° - i\sin 199°) = 91[\cos(180° + 199°) + i\sin(180° + 199°)]$

$= 91[\cos(360° + 19°) + i\sin(360° + 19°)] = 91(\cos 19° + i\sin 19°)$，主輻角是 19°

(C) $-17\overline{\alpha} = 17(-\cos 199° + i\sin 199°) = 17(\cos 19° - i\sin 19°)$

$= 17[\cos(360° - 19°) + i\sin(360° - 19°)] = 17(\cos 341° + i\sin 341°)$， 主輻角是 341°

(D)$\because$ $\alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$，同(A) $\therefore$ $\frac{1}{\alpha}$之主輻角是 161°

(E) $\alpha^2 = (\cos 199° + i\sin 199°)^2 = \cos 2(199°) + i\sin 2(199°)$

$= \cos 398° + i\sin 398° = \cos 38° + i\sin 38°$ $\therefore$ α^2的主輻角是 38°

6.下列敘述，何者正確？

(A)複數 $z = a + bi$，a，$b \in R$，則 $z \in R$ $\Leftrightarrow$ $b = 0$

(B)複數 $z = a + bi$，a，$b \in R$，則 $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(C) $z = \cos\theta + i\sin\theta$，則$\frac{1}{z} = \overline{z}$ (D)複數 $z = a + bi$，a，$b \in R$，則 $z > 0$ $\Leftrightarrow$ $a > 0$

(E)複數 z 在複數平面的對應點是 P，O 為原點，則$|z| = \overline{OP}$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(A) $z \in R$ $\Leftrightarrow$ $a + bi \in R$ $\Leftrightarrow$ $b = 0$

(B)$\because$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\therefore$ $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

(C)$\because$ $|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ $\therefore$ $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{z} = \overline{z}$

(D) $z > 0$ $\Leftrightarrow$ $a + bi > 0$ $\Leftrightarrow$ $a > 0$，$b = 0$

(E)令 $z=a+bi$，a，$b\in R$　$\because$　$P(a，b)$　$\therefore$　$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP}$

7.下列各極坐標方程式，其圖形為一直線者有

(A) $r=0$　(B) $r=2$　(C) $\theta=0$　(D) $\theta=3$　(E) $\theta=-\pi$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $r=0$ 表極點　(B) $r=2$ 表半徑為 2，圓心為極點之圓

8.下列敘述何者正確？

(A) $\mathrm{Arg}(\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{\pi}{3}$　(B) $\mathrm{Arg}(-100i)=\frac{3\pi}{2}$　(C)若 $z>0$，則 $\mathrm{Arg}(z)=0$

(D)若 $z<0$，$\mathrm{Arg}\,(z)=0$　(E)$\left|a+bi\right|=\sqrt{a^2+(bi)^2}$

【解答】(B)(C)

【詳解】

(A) $\mathrm{Arg}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{\pi}{2}$　(D) $z<0$ 時，$\mathrm{Arg}\,(z)=\pi$　(E)$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

三、填充題(每題 10 分)

1.$\sin111°+i\sin201°$化為極式為__________。

【解答】$\cos339°+i\sin339°$

【詳解】

$\sin111°+i\sin201°=\sin(90°+21°)+i\sin(180°+21°)=\cos21°-i\sin21°$

$=\cos(360°-21°)+i\sin(360°-21°)=\cos339°+i\sin339°$

2.$\sin10°-i\cos10°$化為極式為__________。

【解答】$\cos280°+i\sin280°$

【詳解】

$\sin10°-i\cos10°=\cos(270°+10°)+i\sin(270°+10°)=\cos280°+i\sin280°$

3.$\dfrac{(\cos221°+i\sin139°)(\cos39°-i\sin39°)}{\sin350°+i\sin80°}=$ __________。

【解答】1

【詳解】

原式 $=\dfrac{(-\cos41°+i\sin41°)(\cos39°-i\sin39°)}{-\cos80°+i\sin80°}=\dfrac{(\cos41°-i\sin41°)(\cos39°-i\sin39°)}{\cos80°-i\sin80°}$

$=\cos(-41°-39°+80°)+i\sin(-41°-39°+80°)=\cos0°+i\sin0°=1$

4.$\dfrac{(\sin78°+i\cos78°)^6(\sin87°-i\cos87°)^4}{(\sin50°+i\sin40°)^3}=$ __________。

【解答】$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【詳解】

原式 $=\frac{(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)^6(\cos 3^\circ - i\sin 3^\circ)^4}{(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)^3}=\frac{(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)[\cos(-12^\circ)+i\sin(-12^\circ)]}{\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ}$

$=\cos(72^\circ - 12^\circ - 120^\circ) + i\sin(72^\circ - 12^\circ - 120^\circ) = \cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.設$(\cos 10 + i\sin 10)^6 = \cos\theta + i\sin\theta$，$0 \le \theta \le 2\pi$，則$\theta =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$60 - 18\pi$

【詳解】

$(\cos 10 + i\sin 10)^6 = \cos 60 + i\sin 60 = \cos\theta + i\sin\theta$（$0 \le \theta < 2\pi$），故$\theta = 60 - 18\pi$

6.複數 $z = 2\sqrt{3} + 2i$ 的極式爲＿＿＿＿＿，其所代表點的極坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$；$[4，\frac{\pi}{6}]$

【詳解】

$z = 2\sqrt{3} + 2i$，$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$\therefore\ z = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$，此即爲 z 的極式，又 z 的代表點的極坐標爲$[4，\frac{\pi}{6}]$

7.設 $z = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$，則 $z^{75} + z^{76} + z^{77} + \cdots + z^{365}$ 之值爲＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】原式 $=\frac{z^{75}(1-z^{291})}{1-z} = 1$（$z^5 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1$）

8.設 $z = -3i$，則：(1)化爲極式 $z =$ ＿＿＿＿＿。 (2) z 的主輻角爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ (2) $\frac{3\pi}{2}$

【詳解】(1) $z = -3i = 3[0 + (-i)] = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ (2) $\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{2}$

9.設 ω 爲 $x^3 = 1$ 的一虛根。若無窮級數 $1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}\omega^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\omega^n + \cdots$ 之和爲 $\alpha + \beta\omega$，其中 α，β 爲實數，則 $\alpha =$ ＿＿＿＿＿，$\beta =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\alpha = \frac{6}{7}$；$\beta = \frac{2}{7}$

【詳解】

$x^3=1$ 的根爲 1，ω，ω^2 其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ 滿足 $\omega^3=1$ 且 $1+\omega+\omega^2=0$

$1+\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{4}\omega^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\omega^n+\cdots$

公比 $\frac{1}{2}\omega$ 的無窮等比級數其和爲 $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\omega}=\alpha+\beta\omega$（$\alpha$，$\beta\in R$）

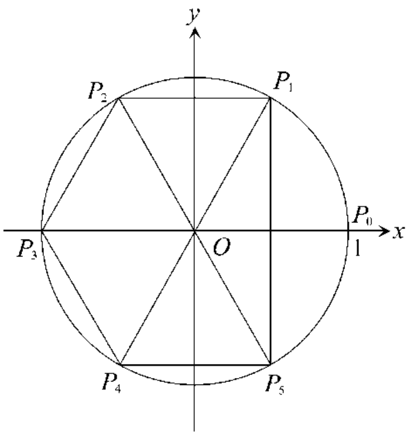
$\therefore\quad 1=(1-\frac{1}{2}\omega)(\alpha+\beta\omega)=\alpha+\beta\omega-\frac{1}{2}\alpha\omega-\frac{1}{2}\beta\omega^2$

$\quad=\alpha+(\beta-\frac{1}{2}\alpha)\omega-\frac{1}{2}\beta(-1-\omega)=(\alpha+\frac{1}{2}\beta)+(\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha)\omega$

$\Rightarrow\quad 1+0\omega=(\alpha+\frac{1}{2}\beta)+(\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha)\omega\Rightarrow\quad \alpha+\frac{1}{2}\beta=1$ 且 $\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{6}{7}$；$\beta=\frac{2}{7}$

10.方程式 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的五個複數根可表爲 $x_k=$ ＿＿＿＿＿；又以此五個根爲頂點在複數平面上所成五邊形區域的面積爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$，$k=1$，2，3，4，5；$\frac{5\sqrt{3}}{4}$



【詳解】

$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^6-1$

$x^6-1=0\quad\Rightarrow\quad x^6=1=\cos0+i\sin0$ 的根爲

$x_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$，$k=0$，1，2，3，4，5

其中 $x_0=\cos0+i\sin0=1$，故 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的五個根

爲 $x_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$，$k=1$，2，3，4，5

設 x_k 在複數平面上的對應點爲 P_k，則五個點 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 爲頂點的五邊形如圖：

$\angle P_1OP_2=\angle P_2OP_3=\angle P_3OP_4=\angle P_4OP_5=\frac{\pi}{3}$，$\angle P_1OP_5=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ 五邊形的面積爲 $4\triangle P_1OP_2+\triangle P_1OP_5=4\times\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

11.設 $f(x)=x^{100}+x^{50}+1$，則 $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】i

【詳解】$z=\frac{-(1+i)}{\sqrt{2}}=-(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$f(-\frac{1+i}{2})=f(z)=z^{100}+z^{50}+1=(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{100}+(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{50}+1$

$= (\cos 25\pi + i\sin 25\pi) + (\cos\frac{25\pi}{2} + i\sin\frac{25\pi}{2}) + 1 = (\cos\pi + i\sin\pi) + (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) + 1$

$= -1 + 0 + 0 + i + 1 = i$

12.設 $z = \dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$ ，求：(1)以主輻角將 z 化成的極式爲__________。 (2) $z^{10} =$ __________。

【解答】(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 105° + i\sin 105°)$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{64} - \frac{1}{64}i$

【詳解】

(1) $|z| = \left|\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-\sqrt{3}i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i+\sqrt{2}i-\sqrt{6}}{1+3}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)i\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos 75° + i\sin 75°)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(180° - 75°) + i\sin(180° - 75°)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 105° + i\sin 105°)$

(2) $z^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}(\cos 105° + i\sin 105°)^{10} = \frac{1}{2^5}(\cos 1050° + i\sin 1050°)$

$= \frac{1}{32}[\cos(1050° - 360° \times 3) + i\sin(1050° - 360° \times 3)]$

$= \frac{1}{32}[\cos(-30°) + i\sin(-30°)] = \frac{1}{32}(\cos 30° - i\sin 30°) = \frac{1}{32}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{64} - \frac{1}{64}i$

13.求 $\dfrac{(3+\sqrt{3}i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^3}$ 之值 ＝ __________。

【解答】216

【詳解】

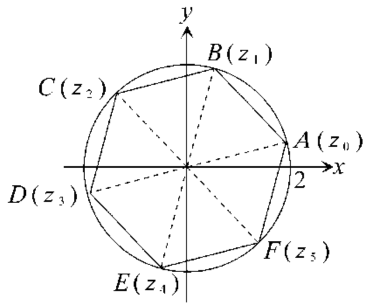
$\because\ 3 + \sqrt{3}\,i = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ (3 + \sqrt{3}\,i)^6 = (2\sqrt{3})^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -(2\sqrt{3})^6 = -2^6 \cdot 3^3$

又 $\because\ 1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\therefore\ (1 + \sqrt{3}\,i)^3 = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^3$

故 $\frac{(3+\sqrt{3}i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^3} = \frac{-2^6 \cdot 3^3}{-2^3} = 2^3 \cdot 3^3 = 216$

14.$x^6=-32+32\sqrt{3}i$ 有 6 個根，此六個根在複數平面上對應的六個點所圍成的六邊形，其面積爲__________。



【解答】$6\sqrt{3}$

【詳解】

$-32+32\sqrt{3}i=64(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=64(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$z_k=2(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6})$，$k=0$，1，2，3，4，5

將六個根圖示在高斯平面上圖形爲一正六邊形，六個頂點在以原點爲圓心，半徑爲 2 的圓形上則正六邊形 $ABCDEF$ 的面積爲 $6\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 60°=6\sqrt{3}$

15.求 $\text{Arg}(\frac{1}{1-i})=$ __________。

【解答】$\frac{\pi}{4}$

【詳解】

$\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$　　$\therefore$　$\text{Arg}(\frac{1}{1-i})=\frac{\pi}{4}$

16.設 $a\in C$，$|a|=8$，主輻角 $\text{Arg}(a)=\frac{4\pi}{3}$，

(1)將 a 以極式表示爲__________。

(2)若 $z^6=a$ 之六根爲 z_0，z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，若 z_3 位於複數平面的第三象限，將 z_3 以極式表示爲__________。

【解答】(1) $8(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$　(2) $\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9})$

【詳解】

(1) $|a|=8$，$\text{Arg}(a)=\frac{4\pi}{3}$　$\Rightarrow$　$a=8(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

(2) $z^6=a=8(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

$z_k=\sqrt[6]{8}\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{6})$，$k=0$，1，2，…，5

$\therefore\quad z_3=\sqrt[6]{8}\,(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{6}+i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{6})=\sqrt{2}\,(\cos\dfrac{11\pi}{9}+i\sin\dfrac{11\pi}{9})$

17.設 $z\in C$，且$|z|=2|z-1|$，$\mathrm{Arg}(\dfrac{z-1}{z})=\dfrac{\pi}{3}$，則$|z|=$ __________。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【詳解】

$\because\quad |z|=2|z-1|\quad\Rightarrow\quad |\dfrac{z-1}{z}|=\dfrac{1}{2}$，而 $\mathrm{Arg}\,(\dfrac{z-1}{z})=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\quad \dfrac{z-1}{z}=\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\quad\Rightarrow\quad 4z-4=(1+\sqrt{3}\,i)z$

$\Rightarrow\quad z(3-\sqrt{3}\,i)=4\quad\Rightarrow\quad |z|\,|3-\sqrt{3}\,i|=4\quad\Rightarrow\quad |z|=\dfrac{4}{\sqrt{12}}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

18.化簡$(1+\cos20°+i\sin20°)^{987}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$，$0°\le\theta<360°$，則$\theta=$ __________。

【解答】150°

【詳解】

$1+\cos20°+i\sin20°=1+\cos2(10°)+i\sin2(10°)$

$=1+2\cos^2 10°-1+i(2\sin10°\cos10°)=2\cos10°(\cos10°+i\sin10°)$

$(1+\cos20°+i\sin20°)^{987}=[2\cos10°(\cos10°+i\sin10°)]^{987}=(2\cos10°)^{987}(\cos9870°+i\sin9870°)$

$=(2\cos10°)^{987}(\cos150°+i\sin150°)=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$，$0°\le\theta<360°$

$\therefore\quad \theta=150°$

19.設數列＜a_n＞滿足 $a_1=i$，$a_{n+1}=\omega a_n$，其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，則 $a_{42}=$ __________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(-\dfrac{1}{2})i$

【詳解】

由 $a_1=i$，$a_{n+1}=\omega a_n$ 知數列＜a_n＞爲首項 i，公比 ω 的等比數列

已知 $a_{n+1}=a_1\omega^n$，$a_{42}=i\omega^{41}=i\omega^{3\times13+2}=i\omega^2$（$\because\quad \omega^3=1$）

即 $a_{42}=i(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})=i(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(-\dfrac{1}{2})i$

20.設 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$，則 $z^{2010}+\dfrac{1}{z^{2010}}$ 之值爲__________。

【解答】2

【詳解】

由 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad z^2-\sqrt{3}z+1=0\quad\Rightarrow\quad z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}\pm i\sin\dfrac{\pi}{6}$

令 $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

則 $z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}} = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{2010} + (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-2010} = 2\cos\frac{2010\pi}{6} = 2$

同理，令 $z = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$ 時，$z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}}$ 也為 2，故所求 $z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}} = 0$

21.以 $2x - \sqrt{3} + i$ 除 $x^{60} - 1$ 之餘式為__________。

【解答】0

【詳解】

$R = (\frac{\sqrt{3} - i}{2})^{60} - 1 = (\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})^{60} - 1 = \cos 10\pi - i\sin 10\pi - 1 = 0$

22.$\triangle ABC$ 中，$(\sin A + i\cos A)(\sin B + i\cos B)(\sin C + i\cos C)$之値為__________。

【解答】i

【詳解】

原式$= [\cos(90^\circ - A) + i\sin(90^\circ - A)][\cos(90^\circ - B) + i\sin(90^\circ - B)][\cos(90^\circ - C) + i\sin(90^\circ - C)]$

$= \cos(90^\circ - A + 90^\circ - B + 90^\circ - C) + i\sin(90^\circ - A + 90^\circ - B + 90^\circ - C)$

$= \cos[270^\circ - (A + B + C)] + i\sin[270^\circ - (A + B + C)] = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i$