計算題（共 100 分）

1. 將 $f(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin x$ 化成 $A\sin(kx+\theta)$ 形式，其中 $A>0$，試求 A，k，θ 及週期．（20 分）

解：

$$f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin x=\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\sqrt{3}\sin x=\sin x\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos x\times\frac{1}{2}$$

$$=\sin x\cos\frac{5\pi}{6}+\cos x\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

故所求為 $A=1$，$k=1$，$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，週期為 2π

2. 設 $0\le x\le\pi$，函數 $f(x)=3\cos^2x+2\sin x\cos x+\sin^2x$，試求：

(1) $f(x)$ 之最大值與當時之 x 值．（15 分）

(2) $f(x)$ 之最小值與當時之 x 值．（15 分）

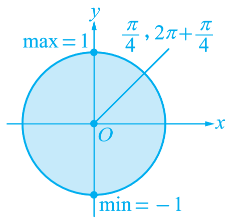
解：$f(x)=3\cos^2x+2\sin x\cos x+\sin^2x$

$$=3\times\frac{1+\cos2x}{2}+\sin2x+\frac{1-\cos2x}{2}=2+\sin2x+\cos2x$$

$$=2+\sqrt{2}\left(\sin2x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos2x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=2+\sqrt{2}\left(\sin2x\times\cos\frac{\pi}{4}+\cos2x\times\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$



$\because 0\le x\le\pi$　$\therefore \dfrac{\pi}{4}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le 2\pi+\dfrac{\pi}{4}$

(1) 當 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 時，$f(x)=2+\sqrt{2}\times1=2+\sqrt{2}$ 為最大值

(2) 當 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{5\pi}{8}$ 時，$f(x)=2+\sqrt{2}\times(-1)=2-\sqrt{2}$ 為最小值

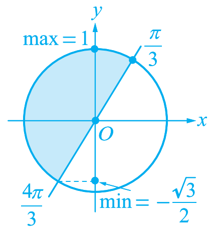
3. 設 $0 \le x \le \pi$，函數 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+2\cos x-2$，試求：

(1) $f(x)$ 之最大值與當時之 x 值．（15 分）

(2) $f(x)$ 之最小值與當時之 x 值．（15 分）

解：

$$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+2\cos x-2$$
$$=2(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6})+2\cos x-2$$
$$=2(\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2})+2\cos x-2=\sqrt{3}\sin x+3\cos x-2$$
$$=2\sqrt{3}(\sin x\times\frac{1}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2})-2$$
$$=2\sqrt{3}(\sin x\times\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\times\sin\frac{\pi}{3})-2$$
$$=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3})-2$$



$\because 0\le x\le\pi \quad \therefore \frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$

(1) 當 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 時，$f(x)=2\sqrt{3}\times1-2=2(\sqrt{3}-1)$ 為最大值

(2) 當 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\pi$ 時，$f(x)=2\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})-2=-5$ 為最小值

4. 將 $g(x)=7\sin x-24\cos x$ 化成 $A\cos(kx+\theta)$ 形式，其中 $A>0$，試求 A，k，$\sin\theta$，$\cos\theta$ 及週期．（20 分）

解：

$$g(x)=7\sin x-24\cos x=25\left[\cos x\times(\frac{-24}{25})+\sin x\times\frac{7}{25}\right]$$
$$=25\left[\cos x\times(\frac{-24}{25})-\sin x\times(\frac{-7}{25})\right]=25\cos(x+\theta),$$

其中 $\cos\theta=\frac{-24}{25}$，$\sin\theta=\frac{-7}{25}$

故所求為 $A=25$，$k=1$，$\sin\theta=\frac{-7}{25}$，$\cos\theta=\frac{-24}{25}$，週期為 2π