高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.07.30					
範圍	3-4 正餘弦的疊合	班級		姓名	
		座號			

一、多重選題(每題 10 分)

1.設 $f(x)=2\sin(30°-x)-2\cos x$， $-60°\le x\le 210°$，若 $f(x)$在 $x=\alpha$ 處有最大值 M，在 $x=\beta$ 處有最小值 m，下列何者正確？

(A) $M=2$ (B) $\alpha=210°$ (C) $m=-2$ (D) $\beta=60°$ (E) $M-m=4$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】

$f(x)=2\sin(30°-x)-2\cos x=2\sin30°\cos x-2\cos30°\sin x-2\cos x=-\cos x-\sqrt{3}\sin x$

$=-2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=-2(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6})$

$=-2\sin(x+\frac{\pi}{6})$且 $-30°\le x+\frac{\pi}{6}\le 240°$

二、填充題(每題 10 分)

1.設 $\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】 $\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+1$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x)+1=2(\sin2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos2x\sin\frac{\pi}{6})+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$

$\therefore$ $M=3$，$m=-1$ $\Rightarrow$ $M+m=2$

2.求下列各式之最大值或最小值：

(1) $\theta\in R$，$f(\theta)=2\cos\theta-3\sin\theta$ 的最小值 =＿＿＿＿＿。

(2) $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le0$，$f(\theta)=2\cos^2\theta-3\sin\theta$ 的最大值 =＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-\sqrt{13}$ (2) $\frac{25}{8}$

【詳解】(1) $f(\theta)=2\cos\theta-3\sin\theta$，$\theta\in R$

$\Rightarrow$ $-\sqrt{2^2+(-3)^2}\le f(\theta)\le\sqrt{2^2+(-3)^2}$ $\Rightarrow$ $-\sqrt{13}\le f(\theta)\le\sqrt{13}$ $\therefore$ 最小值為 $-\sqrt{13}$

(2) $f(\theta)=2\cos^2\theta-3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta=-2\sin^2\theta-3\sin\theta+2$

$=(-2)(\sin\theta+\frac{3}{4})^2+\frac{25}{8}$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le0$ $\Rightarrow$ $-1\le\sin\theta\le0$，當 $\sin\theta=-\frac{3}{4}$時，$f(\theta)$有最大值為 $\frac{25}{8}$

3.設 $0 \le x \le \pi$，$f(x) = 3 + \cos x - \cos(\frac{\pi}{3} - x)$，當 $x = \alpha$ 時有最大值 M，當 $x = \beta$ 時有最小值 m，則 $\alpha + \beta =$__________。 $M + m =$__________。

【解答】(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{11}{2}$

【詳解】

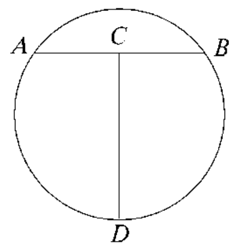
(1) $f(x) = 3 + \cos x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 3 + \cos x - [\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x]$

$= 3 + (\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) = 3 + \cos(x + \frac{\pi}{3})$

$0 \le x \le \pi$，$\frac{\pi}{3} \le x + \frac{\pi}{3} \le \frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad -1 \le \cos(x + \frac{\pi}{3}) \le \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\text{，即 } x = a = 0 \text{ 時，有最大值 } M = \frac{7}{2} \\ \cos(x + \frac{\pi}{3}) = -1\text{，即 } x = \beta = \frac{2\pi}{3} \text{ 時，有最小值 } m = 2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3} \\ M + m = \frac{11}{2} \end{cases}$

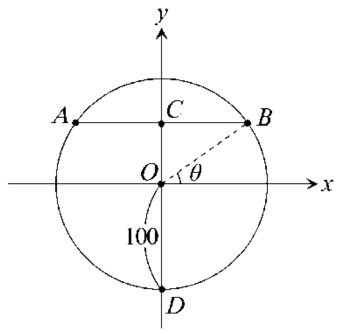
4.某公園有一半徑 100 公尺的圓形池塘，打算在池塘上建一座「T」型的木橋（如圖），試問此木橋總長 $\overline{AB} + \overline{CD}$ 之最大值爲__________。



【解答】$100 + 100\sqrt{5}$

【詳解】

$\begin{cases} \overline{AB} = 2\overline{BC} = 2 \times (100\cos\theta) = 200\cos\theta \\ \overline{CD} = \overline{OC} + \overline{OD} = 100\sin\theta + 100 \end{cases}$



$\overline{AB} + \overline{CD} = 100(2\cos\theta + \sin\theta) + 100 = 100\sqrt{5}\sin(\theta + \alpha) + 100$

$\therefore$ 最大值爲 $100 + 100\sqrt{5}$

5.函數 $f(x) = \frac{2\cos x}{3 + \sin x}$ 的最大值爲__________，最小值爲__________。

【解答】$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ； $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

令 $k = \frac{2\cos x}{3 + \sin x} \quad \therefore \quad k(3 + \sin x) = 2\cos x \quad \Rightarrow \quad 3k = 2\cos x - k\sin x$

x 爲任意實數，知： $|3k| \le \sqrt{2^2 + (-k)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 9k^2 \le 4 + k^2$

$\therefore\quad 8k^2 \le 4 \quad\Rightarrow\quad k^2 \le \frac{1}{2}$， $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le k \le \frac{\sqrt{2}}{2}$，故最大值爲$\frac{\sqrt{2}}{2}$，而最小值爲 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.設 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，$f(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) - \sin 2x$，則 $\sin x + \cos x$ 的範圍爲________。

若 $f(x)$在 $x = x_1$時有最大值 M；在 $x = x_2$時有最小值爲 m，則
數對$(x_1，M)$ = ________，$(x_2，m)$ = ________。

【解答】$1 \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$； $(x_1，M) = (0，4)$，$(\frac{\pi}{2}，4)$； $(x_2，m) = (0，1 + 2\sqrt{2})$

【詳解】

(1)令 $t = \sin x + \cos x$，故得 $t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

又 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，故$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$，故 $1 \le t \le \sqrt{2}$

(2)將 $t = \sin x + \cos x$ 兩邊平方整理，知 $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

因爲 $f(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cos x$

將 $f(x)$中 $\sin x + \cos x$ 及 $\sin x \cos x$ 用 t 及 $\frac{t^2-1}{2}$ 代換後，$f(x)$用 t 所表的函數記爲 $g(t)$，則

$g(t) = 2 + 2t - (t^2 - 1) = -(t^2 - 2t + 1) + 4 = -(t - 1)^2 + 4$，其中 $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

①當 $t = 1$ 時，此時可解出 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$，因此 $g(t)$有最大值 4；亦即 $f(x)$有最大值 4

②當 $t = \sqrt{2}$ 時，此時可解出 $x = \frac{\pi}{4}$，因此 $g(t)$有最小值 $1 + 2\sqrt{2}$；亦即 $f(x)$有最小值 $1 + 2\sqrt{2}$

7.$\sin x - \cos x - 1 \ne 0$，設當 $0 \le x < 2\pi$ 時，$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x - 1}$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，

則數對$(M，m)$ = __________。

【解答】$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}，-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

【詳解】

(1)令 $t = \sin x - \cos x \ne 1 \quad\Rightarrow\quad t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \quad\Rightarrow\quad \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

(2) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(1 - t^2)}{t - 1} = -\frac{1}{2}(t + 1)$

(3) $0 \le x < 2\pi \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad 1 - \sqrt{2} \le t + 1 \le 1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \geq -\dfrac{1}{2}(t+1) \geq -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\therefore \quad M = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，$m = -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

8.設 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$，求

(1)$\sin(x+\dfrac{\pi}{6})+\cos x$ 在 $x=$ ＿＿＿＿＿時，有最大值。

(2)$\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\cos x$ 的最小值爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{-11\pi}{6}$　(2)$-\dfrac{1}{4}$

【詳解】

(1) $\sin(x+\dfrac{\pi}{6})+\cos x = \sin x\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{6} + \cos x$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{3}{2}\cos x = \sqrt{3}(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

(2) $\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\cos x = \dfrac{1}{2}[\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\sin\dfrac{\pi}{6}] = \dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}$

$\therefore$　最小值 $= -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$

9.設 $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$，$0 \leq x < 2\pi$，

(1)若 $f(x)=2$，則 $x=$ ＿＿＿＿＿。　(2)若 $f(x)=1$，則 $x=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\dfrac{11\pi}{6}$　(2)$\dfrac{\pi}{6}$

$f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x = 2\sin(x+\dfrac{2\pi}{3})$

(1) $f(x)=2 \quad \Rightarrow \quad \sin(x+\dfrac{2\pi}{3})=1 \quad \Rightarrow \quad x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{11\pi}{6}$

(2) $f(x)=1 \quad \Rightarrow \quad \sin(x+\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{13\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$

10.設 $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$，則 $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$ 之最大值 $=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】3

【詳解】

原式 $= 3 \cdot \dfrac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 2 - \sin 2x - \cos 2x$

$= 2-\sqrt{2}(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos 2x\sin\dfrac{\pi}{4}) = 2-\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$

$\because\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad 0\le 2x\le\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1 \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{2}\ \le -\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\Rightarrow\quad 2-\sqrt{2}\le 2-\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 3$

11.$(\sqrt{2}+1)\sin x-(\sqrt{2}-1)\cos x+1$ 之最大值 = __________。

【解答】$1+\sqrt{6}$

【詳解】$M=1+\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{6}$

12.設 $f(x)=\cos x(\cos x-\sin x)$，$0\le x<2\pi$，則

(1) $f(x)$之最小值爲__________。 (2) $f(x)$有最小值時，$x=$ __________。

【解答】(1)$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (2)$\frac{3\pi}{8}$

$f(x)=\cos x\,(\cos x-\sin x)=\cos^2 x-\cos x\sin x$

$=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)\ =\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$

$\because\quad 0\le x\le\pi \quad\Rightarrow\quad 0\le 2x\le 2\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{3\pi}{4}\le 2x+\frac{3\pi}{4}\le\frac{11\pi}{4}$

$\Rightarrow\quad -1\le\sin(2x+\frac{3\pi}{4})\le 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1-\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

故 $f(x)$之最小值爲$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$，且此時 $2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{3\pi}{8}$

13.$y=\cos x-\sqrt{3}\sin x$ 化爲 $y=2\sin(\alpha-x)$，$0\le\alpha<2\pi$ ，求$\alpha=$ __________。

【解答】$\frac{\pi}{6}$

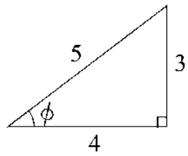
【詳解】$y=\cos x-\sqrt{3}\sin x=2(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=2\sin(\frac{\pi}{6}-x)\quad\therefore\quad\alpha=\frac{\pi}{6}$

14.設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$y=3\cos x+4\sin x$，求

(1) y 有最大值時，$\cos x=$ __________。 (2) y 之最小值__________。

【解答】(1)$\frac{3}{5}$ (2) 3

【詳解】



$y = 3\cos x + 4\sin x = 5(\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x) = 5(\sin x\cos\phi + \cos x\sin\phi)$

$= 5\sin(x + \phi)$ ，$\phi \le x + \phi \le \frac{\pi}{2} + \phi$

$\therefore$ Max = 5，當 $x + \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \phi \quad \therefore \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi = \frac{3}{5}$

當 $x = 0$ 時，min = 3 + 0 = 3

15.設θ，$\phi \in R$，則 $7\sin\theta + 24\cos\phi + 20$ 之最小值 = ＿＿＿＿＿。

【解答】-11

【詳解】

$-7 \le 7\sin\theta \le 7$ 且$-24 \le 24\cos\phi \le 24 \quad \therefore \quad -31 \le 7\sin\theta + 24\cos\phi \le 31$

故 $-11 \le 7\sin\theta + 24\cos\phi + 20 \le 51$

16.設 $f(x) = \sin x - \cos x$，$0 \le x < 2\pi$，

(1)若 $f(x) = \sqrt{2}$ ，則 $x =$ ＿＿＿＿＿。 (2)若 $1 \le f(x) \le \sqrt{2}$ ，則 x 的範圍是＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

$f(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$

(1) $f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

(2)$\because$ $1 \le f(x) \le \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(x - \frac{\pi}{4}) \le 1$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

17.$f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin x + \cos x)$，則

(1) $f(x)$之最小值為＿＿＿＿＿。 (2) $f(x)$之最大值為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $2 - 4\sqrt{2}$ (2) $2 + 4\sqrt{2}$

$f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x + 2)^2 - 4 = [\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2]^2 - 4$

$\because \quad -1 \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \le \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2 \le \sqrt{2} + 2$

$\Rightarrow 6 - 4\sqrt{2} \le [\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2]^2 \le 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow 2 - 4\sqrt{2} \le f(x) \le 2 + 4\sqrt{2}$

故 $f(x)$之最小值為 $2 - 4\sqrt{2}$ ，最大值為 $2 + 4\sqrt{2}$

18.函數 $y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$，

(1)疊合成 $y=r\cos(x+\alpha)$，$r>0$，$0\le\alpha<2\pi$，則$(r，\alpha)=$ __________。

(2) $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$時，$y$ 之最大值爲__________。

【解答】(1)$(2\sqrt{3}，\frac{\pi}{6})$　(2) $2\sqrt{3}$

(1) $y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}(\cos x-\frac{1}{2}\sin x)$

$=2\sqrt{3}(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{6})$　　$\therefore$　$(r，\alpha)=(2\sqrt{3}，\frac{\pi}{6})$

(2)由$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$　$\Rightarrow$　$-\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$　$\Rightarrow$　$\frac{1}{2}\le\cos(x+\frac{\pi}{6})\le 1$　$\Rightarrow$　$\sqrt{3}\le y\le 2\sqrt{3}$

$\therefore$　y 之最大值爲 $2\sqrt{3}$

19.設 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x+6$，$0<x\le 2\pi$，則 $y=f(x)$圖形上的最低點坐標爲__________。

【解答】$(\frac{5\pi}{3}，4)$

【詳解】

$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x+6=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)+6=2\sin(x-30°)+6$

當 $x-30°=270°$　$\Rightarrow$　$x=300°=\frac{5\pi}{3}$時，$f(x)=4$ 爲最小值

$\therefore$　$y=f(x)$圖形上的最低點坐標爲$(\frac{5\pi}{3}，4)$

20.設 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$，則 x 之值爲__________。

【解答】$\frac{\pi}{6}$

【詳解】

(1)$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$　$\Rightarrow$　$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$　$\sin 60°\cos x-\cos 60°\sin x=\frac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$\sin(x-60°)=-\frac{1}{2}$

(2)　$\because$　$-90°<x<90°$　$\Rightarrow$　$-150°<x-60°<30°$

(3)當 $x-60°=-30°$時，$\sin(x-60°)=-\frac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$x=30°=\frac{\pi}{6}$

21.設 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$，則 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x$ 最大值爲__________，最小值爲__________。

【解答】$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$；1

【詳解】

因爲 $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)+\dfrac{1}{2}\sin 2x+(1+\cos 2x)$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$

$\because\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\quad \therefore\ \dfrac{\pi}{4} \le 2x+\dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{5\pi}{4}$，故得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(2x+\dfrac{\pi}{4}) \le 1$

所以 $f(x)$的最大值爲 $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$，最小值爲 1

22.設 $0 \le x \le \pi$，若函數 $f(x)=4\sin x-2\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$在 $x=x_1$ 時有最大值 M；在 $x=x_2$ 時有最小值爲 m，則數對$(x_1，M)=$ __________，$(x_2，m)=$ __________。

【解答】$(\dfrac{\pi}{6}，2)$；$(\pi，-\sqrt{3})$

【詳解】

$f(x)=4\sin x-2\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})=4\sin x-2\sqrt{3}(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{6})$

$=4\sin x-2\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

因爲 $0 \le x \le \pi$，所以 $\dfrac{\pi}{3} \le x+\dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{4\pi}{3}$。

①當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$時，$f(x)$最大值 $M=2$

②當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$，即 $x=\pi$ 時，$f(x)$最小值 $m=-\sqrt{3}$

23.設 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=a\cos(x-\theta)$，其中 $a>0$，而 $0<\theta<2\pi$，則 $a=$ ________，而 $\theta=$ ________。

【解答】$a=2$；$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$

【詳解】

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2(\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)=2(\cos x\cos\frac{5\pi}{6}+\sin x\sin\frac{5\pi}{6})=2\cos(x-\frac{5\pi}{6})$

$\therefore\ a=2$，$\theta=\frac{5\pi}{6}$

24.求 $\csc10°-\sqrt{3}\sec10°$之值 = ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】4

【詳解】$\csc10°-\sqrt{3}\sec10°=\frac{1}{\sin10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10°}=\frac{\cos10°-\sqrt{3}\sin10°}{\sin10°\cos10°}=\frac{2(\frac{1}{2}\cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°)}{\frac{1}{2}\sin20°}$

$$=\frac{2(\sin30°\cos10°-\cos30°\sin10°)}{\frac{1}{2}\sin20°}=\frac{2\sin20°}{\frac{1}{2}\sin20°}=4$$

25.設 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$，則 $2\cos x(\cos x-\sin x)$之最小值 = ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$1-\sqrt{2}$

【詳解】

$2\cos^2x-2\sin x\cos x=1+\cos2x-\sin2x$

$$=1-\sqrt{2}(\sin2x\cos\frac{\pi}{4}-\cos2x\sin\frac{\pi}{4})=1-\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$$

$\because\ -\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{3}\le 2x\le\pi\ \Rightarrow\ -\frac{7\pi}{12}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow\ -1\le\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le1\ \Rightarrow\ -\sqrt{2}\le-\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow\ 1-\sqrt{2}\le1-\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le1+\sqrt{2}$

26.$\sin(x+\frac{\pi}{3})+2\sin(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\cos(\frac{2\pi}{3}-x)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】0

【詳解】

原式 $=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+2(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3}\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x)$

$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sin x-\sqrt{3}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{3}{2}\sin x=0$

27.$\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ 且 $3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=5$，則$\theta=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{\pi}{3}$

【詳解】

$3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=5 \quad\Rightarrow\quad 3(\frac{1-\cos 2\theta}{2})+2\sqrt{3}\sin 2\theta-\frac{1+\cos 2\theta}{2}=5$

$\Rightarrow\quad 2\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cos 2\theta=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta=1 \quad\Rightarrow\quad \sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore\quad 2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{2}$，$-\frac{3\pi}{2}$，⋯，但$\frac{\pi}{12}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$ $\quad\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}$

28. $\sqrt{3}\csc 20°-\sec 20°=$ __________。

【解答】4

【詳解】

$$\sqrt{3}\csc 20°-\sec 20°=\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°}-\frac{1}{\cos 20°}=\frac{\sqrt{3}\cos 20°-\sin 20°}{\sin 20°\cos 20°}$$

$$=\frac{4(\sin 60°\cos 20°-\cos 60°\sin 20°)}{\sin 40°}=4$$

29. 若 $f(x)=2\cos(\frac{\pi}{3}-x)-2\cos x-3$，$0\leq x\leq\pi$，當 $x=\alpha$ 時，$f(x)$有最大值 M，當 $x=\beta$ 時，$f(x)$有最小值 m，則序組$(\alpha$，$M)=$ __________；$(\beta$，$m)=$ __________。

【解答】$(\frac{2\pi}{3}$，$-1)$，$(0$，$-4)$

【詳解】

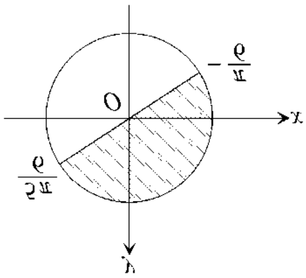
$f(x)=2\cos(\frac{\pi}{3}-x)-2\cos x-3=2(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-2\cos x-3=\sqrt{3}\sin x-\cos x-3$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)-3=2\sin(x-\frac{\pi}{6})-3$

$\because\quad 0\leq x\leq\pi \quad\therefore\quad -\frac{\pi}{6}\leq x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5\pi}{6}$

①當 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{2\pi}{3}$ 時，有最大值 $=2-3=-1 \quad\therefore\quad (\alpha$，$M)=(\frac{2\pi}{3}$，$-1)$

②當 $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 時，有最小值 $=2(-\frac{1}{2})-3=-4 \quad\therefore\quad (\beta$，$m)=(0$，$-4)$



30.已知 $\sin\theta$ ，$\cos\theta$ 是方程式 $x^2+kx+k=0$ 之兩根，則 $k=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$1-\sqrt{2}$

【詳解】

$\sin\theta$，$\cos\theta$ 是 $x^2+kx+k=0$ 之兩根

$\therefore\ \begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=-k\\ \sin\theta\cos\theta=k\end{cases} \Rightarrow \quad \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad |k|\le\sqrt{2}$

$k^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2k$

$\Rightarrow\quad k^2-2k-1=0 \quad\Rightarrow\quad k=1\pm\sqrt{2}$（正數不合） $\quad\therefore\quad k=1-\sqrt{2}$

31.將函數 $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\sin x$ 化為 $r\sin(x-\phi)$的形式，其中 $r>0$，$0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ ，$0\le x\le\pi$，求：

(1)數對(r，ϕ) = ＿＿＿＿＿。 (2)函數值 y 的範圍為＿＿＿＿＿。

【解答】(1)($\sqrt{3}$ ，$\frac{\pi}{6}$) (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le y\le\sqrt{3}$

【詳解】

(1) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\sin x=2\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{3}+x}{2}\cos\dfrac{x-\frac{\pi}{3}-x}{2}$

$=2\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6}) \qquad\therefore\quad (r，\phi)=(\sqrt{3}，\frac{\pi}{6})$

(2)$\because\quad 0\le x\le\pi$，$-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$

$\therefore\quad -\frac{1}{2}\le\sin(x-\frac{\pi}{6})\le 1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})\le\sqrt{3}$

32.若$\pi\le x\le 2\pi$，求 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+6\sin x-6\sqrt{3}\cos x$ 之最小值＿＿＿＿＿。

【解答】-14

【詳解】

$f(x)=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)+12(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$

$=2(\sin 60°\ \sin 2x-\cos 60°\ \cos 2x)+12(\sin 30°\ \sin x-\cos 30°\ \cos x)$

$=-2\cos(2x+60°)-12\cos(x+30°)$

$=-2(2\cos^2(x+30°)-1)-12\cos(x+30°)$

$=-4\cos^2(x+30°)-12\cos(x+30°)+2$

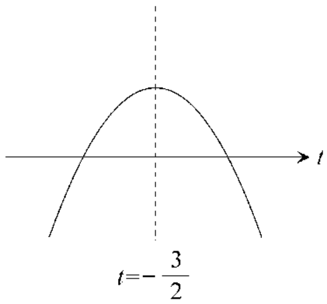
$=-4[\cos(x+30°)+\frac{3}{2}]^2+2+4\cdot\frac{9}{4}$

$=-4[\cos(x+30°)+\frac{3}{2}]^2+11$

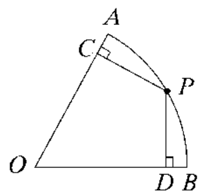
$\because$ $180°\le x\le 360°$ $\therefore$ $210°\le x+30°\le 390°$ $\therefore$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos(x+30°)\le 1$

令 $t=\cos(x+30°)$， $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le t\le 1$ $\Rightarrow$ $y=f(x)=-4(t+\frac{3}{2})^2+11$

$\therefore$ 當 $t=1$ 時，有 $\min=-4(1+\frac{3}{2})^2+11=-14$



33.扇形 OAB（見下圖）之圓心角$\frac{\pi}{4}$，半徑 1，P 爲 $\overset{\frown}{AB}$ 上之動點，$\overline{PC}\perp\overline{OA}$於 C，$\overline{PD}\perp\overline{OB}$於 D，求四邊形 $PCOD$ 之最大面積______。



【解答】$\frac{\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

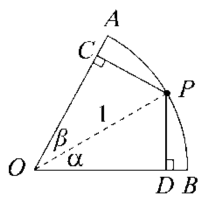
四邊形 $PCOD$ 面積

$=\frac{1}{2}\overline{OD}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{PC}=\frac{1}{2}(\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta)$

$=\frac{1}{2}[\sin\alpha\cos\alpha+\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)]$（$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$）$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\alpha)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2})$

$=\frac{1}{4}(1+\sin 2\alpha-1+\cos 2\alpha)=\frac{1}{4}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)\le\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$



34.$y=3\sin x-4\cos x$，當 $x=\alpha$ 時，y 有最大値，求 $\tan\frac{\alpha}{2}=$ __________。

【解答】3

【詳解】

$y=3\sin x-4\cos x=5(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x)=5\sin(x-\phi)$，$\cos\phi=\frac{3}{5}$ ，$\sin\phi=\frac{4}{5}$

當 $\sin(x-\phi)=1$，即 $x-\phi=\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$ 時，y 有最大值 5

$\therefore\quad \alpha=\phi+\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$

$\Rightarrow\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\tan(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}+n\pi)=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\phi}{2}}=\dfrac{1+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\phi}{2}}$

又 $\tan\phi=\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}\quad\Rightarrow\quad\tan\frac{\phi}{2}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

35.將 $\cos^2x+2a\sin x\cos x+b\sin^2x$ 表爲 $r\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的形式，其中 $r>0$，則 $a=$ ____，$b=$ ____。

【解答】1； -1

【詳解】

因爲恆等式 $\cos^2x+2a\sin x\cos x+b\sin^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)+a\sin2x+\frac{b}{2}(1-\cos2x)$

$=\dfrac{1-b}{2}\cos2x+a\sin2x+\dfrac{1+b}{2}=r(\sin\frac{\pi}{4}\cos2x+\cos\frac{\pi}{4}\sin2x)$

比較兩邊可得 $\begin{cases}\dfrac{1+b}{2}=0 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1-b}{2}=a=\dfrac{\sqrt{2}r}{2} & \cdots\cdots②\end{cases}$

由①得 $b=-1$，代入②得 $r=\sqrt{2}$ ，再由②得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}r=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1$