高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.06.22					
範圍	3-2 和角公式	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 (每格 10 分)

1. 試求$\sin(27°+\theta)\cdot\cos(63°-\theta)-\cos(207°+\theta)\cdot\sin(117°+\theta)$的值____________ .

解答 1

解析 原式 $=\sin(27°+\theta)\cdot\cos(63°-\theta)+\cos[180°+(27°+\theta)]\cdot\sin[180°-(63°-\theta)]$

$=\sin(27°+\theta)\cdot\cos(63°-\theta)+\cos(27°+\theta)\cdot\sin(63°-\theta)$

$=\sin\left[(27°+\theta)+(63°-\theta)\right]=\sin 90°=1$.

2. $\triangle ABC$ 中，若 $\tan A\cdot\tan B=1$，則$\triangle ABC$ 的形狀爲____________ .

解答 直角三角形

解析 $\tan A\cdot\tan B=1\Rightarrow\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=1\Rightarrow\sin A\cdot\sin B=\cos A\cdot\cos B$

$\Rightarrow\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B=0\Rightarrow\cos(A+B)=0$ ，$\therefore A+B=90°$ ，$\therefore\triangle ABC$ 爲直角三角形 .

3. $\sin 160°\cdot\cos(-25°)+\cos(-20°)\cdot\sin 25°=$____________ .

解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析 原式$=\sin(180°-20°)\cdot\cos 25°+\cos 20°\cdot\sin 25°$

$=\sin 20°\cdot\cos 25°+\cos 20°\cdot\sin 25°\quad=\sin(20°+25°)=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

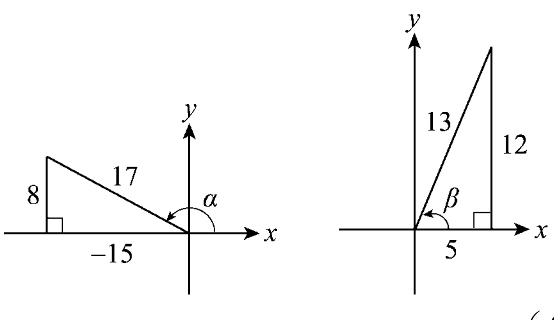
4. 設α 爲第二象限角，β 爲第一象限角且$\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$， $\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，求：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$____________，(2) $\cos(\alpha-\beta)=$____________，(3) $\tan(\beta-\alpha)=$____________ .

解答 (1) $-\dfrac{140}{221}$;(2) $\dfrac{21}{221}$;(3) $-\dfrac{220}{21}$

解析 已知α 爲第二象限角，$\sin\alpha=\dfrac{8}{17}\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{15}{17}$ ， $\tan\alpha=-\dfrac{8}{15}$

β 爲第一象限角，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}\Rightarrow\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ ， $\tan\beta=\dfrac{12}{5}$



(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\left(\dfrac{8}{17}\right)\times\left(\dfrac{5}{13}\right)+\left(-\dfrac{15}{17}\right)\times\left(\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{140}{221}$.

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\left(-\dfrac{15}{17}\right)\times\left(\dfrac{5}{13}\right)+\left(\dfrac{8}{17}\right)\times\left(\dfrac{12}{13}\right)=\dfrac{21}{221}$.

$$(3)\ \tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\times\tan\beta}=\frac{\frac{12}{5}-\left(-\frac{8}{15}\right)}{1+\left(-\frac{8}{15}\right)\times\left(\frac{12}{5}\right)}=-\frac{220}{21}\ .$$

5. $\tan12^\circ\cdot\tan33^\circ+\tan12^\circ+\tan33^\circ+1=$______________ .

解答 2

解析 $\because 33^\circ+12^\circ=45^\circ$

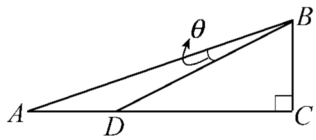
$$\therefore \tan(33^\circ+12^\circ)=\tan45^\circ=1\Rightarrow\frac{\tan33^\circ+\tan12^\circ}{1-\tan33^\circ\cdot\tan12^\circ}=1$$

$$\Rightarrow \tan33^\circ+\tan12^\circ=1-\tan33^\circ\cdot\tan12^\circ$$

$$\Rightarrow \tan12^\circ\cdot\tan33^\circ+\tan12^\circ+\tan33^\circ=1$$

$$\therefore \tan12^\circ\cdot\tan33^\circ+\tan12^\circ+\tan33^\circ+1=1+1=2\ .$$

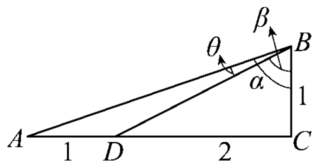
6.$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，D 介於 A 與 C 之間，且 $\overline{DC}=2\overline{AD}=2\overline{BC}$，$\angle ABD=\theta$，則 $\tan\theta=$______________ .



解答 $\frac{1}{7}$

解析 設 $\angle ABC=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，則 $\angle ABD=\alpha-\beta$

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{3-2}{1+3\times2}=\frac{1}{7}\ .$$



7. 設 $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$，$-\frac{\pi}{2}\le\beta\le0$，且 $\sin\alpha=\frac{13}{14}$，$\cos\beta=\frac{5}{14}\sqrt{3}$，則：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$______________ . (2) $\alpha+\beta=$______________ .

解答 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;(2) $\frac{\pi}{3}$

解析 (1) $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$，$\sin\alpha=\frac{13}{14}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{3}}{14}$

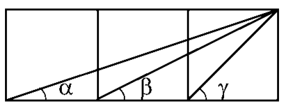
$-\frac{\pi}{2}\le\beta\le0$，$\cos\beta=\frac{5\sqrt{3}}{14}\Rightarrow\sin\beta=-\frac{11}{14}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{13}{14}\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)\times\left(-\frac{11}{14}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)\times\frac{5\sqrt{3}}{14}-\frac{13}{14}\times\left(-\frac{11}{14}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\because 0\le\alpha+\beta\le\pi\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}\ .$$

8.三個同大的正方形併成一長方形，如下圖，試求 $\alpha+\beta+\gamma=$______________ .

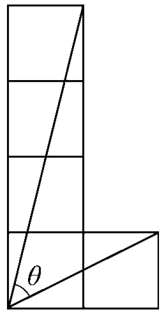


解答 $\frac{\pi}{2}$

解析 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$， $\tan\beta=\frac{1}{2}$， $\tan\gamma=1\Rightarrow\gamma=45^\circ$

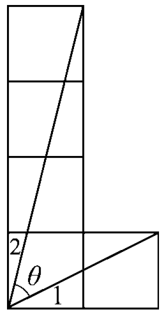
$\because\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1\Rightarrow\alpha+\beta=45^\circ$ ，$\therefore\alpha+\beta+\gamma=90^\circ=\frac{\pi}{2}$.

9. 如下圖，由 5 個正方形所構成，求 $\tan\theta=$____________ .



解答 $\frac{7}{6}$

解析 如圖， $\theta=90^\circ-\angle1-\angle2$



$\tan\theta=\tan\left[90^\circ-(\angle1+\angle2)\right]\ =\cot(\angle1+\angle2)\ =\dfrac{1}{\tan(\angle1+\angle2)}$

$=\dfrac{1}{\frac{\tan\angle1+\tan\angle2}{1-\tan\angle1\tan\angle2}}\ =\dfrac{1}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}}=\frac{7}{6}$.

10.設方程式 $x^2-\sqrt{5}x-1=0$ 的二根爲 $\cot\alpha$， $\cot\beta$，則

(1) $\cot(\alpha+\beta)=$________________

(2)無窮級數 $1+\cot(\alpha+\beta)+\cot^2(\alpha+\beta)+\cdots+\cot^n(\alpha+\beta)+\cdots$ 的和爲____________ .

解答 (1)(2) $5-2\sqrt{5}$

解析 由根與係數關係得 $\cot\alpha+\cot\beta=\sqrt{5}$， $\cot\alpha\cdot\cot\beta=-1$

$\Rightarrow\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\dfrac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}\ =\dfrac{-1-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore1+\cot(\alpha+\beta)+\cot^2(\alpha+\beta)+\cdots\ =\dfrac{1}{1-\cot(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)=5-2\sqrt{5}$.

11.已知 $\tan x+\tan y=4$， $\cot x+\cot y=3$，求 $\tan(x+y)=$____________ .

解答 -12

解析 $\cot x+\cot y=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}=\dfrac{\tan y+\tan x}{\tan x\cdot\tan y}\ =\dfrac{4}{\tan x\cdot\tan y}=3$

$\therefore\tan x\cdot\tan y=\frac{4}{3}$ ，故 $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}=\dfrac{4}{1-\frac{4}{3}}\ =-12$.

12.已知△ ABC 中， $\tan A=\frac{1}{3}$ ， $\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}$ ，則 $\angle C=$ ____________ .

解答 135°

解析 $\tan A=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin A=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\cos A=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\angle A+\angle B+\angle C=180°\Rightarrow\angle C=180°-\left(\angle A+\angle B\right)$

$\cos C=\cos[180°-\left(A+B\right)]=-\cos\left(A+B\right)=-\left(\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B\right)$

$=-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{5}{\sqrt{50}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\therefore\angle C=135°$.

13. 求 $\dfrac{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan x}{1+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan x}=$ ____________ .

解答 $\sqrt{3}$

解析 原式 $=\tan\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-x\right]=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

14. $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin\alpha$ ， $\sin\beta$ 爲 $7x^2-6x+1=0$ 的兩根，則 $\sin\left(\alpha+\beta\right)\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)=$ ____________ .

解答 $-\frac{12\sqrt{2}}{49}$

解析 $7x^2-6x+1=0\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{8}}{14}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{7}$

$\because$ 二根爲 $\sin\alpha$ ， $\sin\beta$ ，且 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha<\sin\beta$ ， $\sin\alpha=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ ， $\sin\beta=\frac{3+\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\sin\left(\alpha+\beta\right)\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\left(\frac{3-\sqrt{2}}{7}\right)^2-\left(\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right)^2$

$=\frac{\left(11-6\sqrt{2}\right)-\left(11+6\sqrt{2}\right)}{49}=-\frac{12\sqrt{2}}{49}$.

15. △ ABC 中， $\cos A=\frac{3}{\sqrt{13}}$ ， $\tan B=\frac{3}{4}$ ，且其外接圓半徑長爲 $\sqrt{13}$ 單位，則 $\overline{AB}=$ ____________ .

解答 $\frac{34}{5}$

解析 $\cos A=\frac{3}{\sqrt{13}}\Rightarrow\sin A=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\tan B=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin B=\frac{3}{5}$ ， $\cos B=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin C=\sin\left[180^\circ-(A+B)\right]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{8}{5\sqrt{13}}+\dfrac{9}{5\sqrt{13}}=\dfrac{17}{5\sqrt{13}}$

$\therefore$ 由正弦 $\Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R \quad \Rightarrow \overline{AB}=2R\sin C=2\sqrt{13}\times\dfrac{17}{5\sqrt{13}}=\dfrac{34}{5}$.

16.(1)若 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，試求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 的值__________ .

(2)若 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，試求 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)$ 的值__________ .

解答 (1)2;(2)2

解析 (1) $1=\tan\dfrac{\pi}{4}=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}\Rightarrow\ 1-\tan\alpha\cdot\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$

故 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta$

$=1+(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)+\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$.

(2) $-1=\tan\dfrac{3\pi}{4}=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}\Rightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta-1=\tan\alpha+\tan\beta$

故 $(1-\tan\alpha)\cdot(1-\tan\beta)=1-(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$.

17.設方程式 $x^2+4x-3=0$ 的二根是 $\tan\alpha$， $\tan\beta$，試求

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$__________ . (2) $\cos^2(\alpha+\beta)=$__________ .

(3) $2\sin^2(\alpha+\beta)-3\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)+4\cos^2(\alpha+\beta)=$__________ .

解答 (1) -1;(2) $\dfrac{1}{2}$;(3) $\dfrac{9}{2}$

解析 由題意知 $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-4\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=-3\end{cases}$

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{-4}{4}=-1$.

(2) $\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{\tan^2(\alpha+\beta)+1}=\dfrac{1}{2}$.

(3)原式 $=\cos^2(\alpha+\beta)\left[\dfrac{2\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}-\dfrac{3\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}+4\right]$

$=\cos^2(\alpha+\beta)\left[2\tan^2(\alpha+\beta)-3\tan(\alpha+\beta)+4\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[2(-1)^2-3(-1)+4\right]=\dfrac{9}{2}$.

18.若 $\tan(\alpha-\beta)=3$， $\tan(\beta-\gamma)=\dfrac{1}{2}$，求 $\tan(\gamma-\alpha)$ 的值=__________ .

解答 7

解析 $(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)=\alpha-\gamma$

$$\tan(\alpha-\gamma)=\tan\left[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)\right]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)}{1-\tan(\alpha-\beta)\cdot\tan(\beta-\gamma)}=\frac{3+\frac{1}{2}}{1-3\times\frac{1}{2}}=-7$$

$\therefore \tan(\gamma-\alpha)=7$.

19.$\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{5}{13}$，$\cos B=-\frac{3}{5}$，求 $a:b:c=$_____________ .

解答 $25:52:33$

解析 $\because \sin A=\frac{5}{13},\quad \cos B=-\frac{3}{5}\Rightarrow \cos A=\frac{12}{13},\quad \sin B=\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \sin C=\sin\left[180^\circ-(A+B)\right]=\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$$

$$=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{33}{65}$$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{5}{13}:\frac{4}{5}:\frac{33}{65}=25:52:33$.

20. 已知$\triangle ABC$ 中，$\tan A=\frac{1}{8}$，$\tan B=\frac{7}{9}$，則 $\angle C=$_____________ .

解答 135°

解析 $\tan C=\tan\left[180^\circ-(A+B)\right]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{8}\times\frac{7}{9}}=-\frac{9+56}{72-7}=-1$

$\therefore \angle C=135^\circ$.

21. 設 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，則：

(1) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$_____________ .　(2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=$_____________ .

(3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=$_____________ .　(4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=$_____________ .

解答 (1) $-\frac{1}{5}$;(2) $-\frac{5}{7}$;(3) $\frac{5}{7}$;(4) 5

解析 (1) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=-\frac{1}{5}$. ⇐分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$

(2) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-\frac{5}{7}$. ⇐分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$

(3) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{5}{7}$. ⇐分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$

(4) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=5$. ⇐分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$