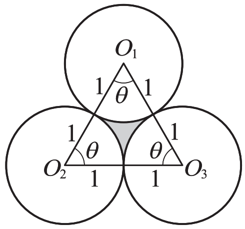
計算題（共 100 分）

1. 三個半徑為 1 的硬幣兩兩互相外切，試求中央空隙部分之面積及周長．（20 分）



解：$\triangle O_1O_2O_3$ 為邊長為 2 之正三角形，

其面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

設 $\theta=\angle O_1=\angle O_2=\angle O_3=\frac{\pi}{3}$ 為三扇形之圓心角，

弧長均為 $r\theta=\frac{\pi}{3}$，面積均為 $\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{\pi}{6}$

故所求區域周長為 $3\times\frac{\pi}{3}=\pi$，面積為 $\sqrt{3}-\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

2. 設 $-2\pi\leq x\leq 2\pi$，

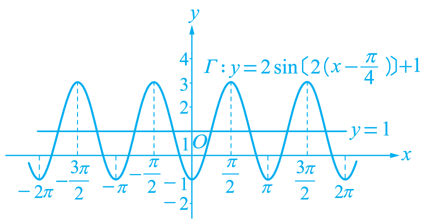
(1) 試扼要繪出 $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]+1$ 之圖形，並求其週期（需呈現遞增或遞減、最高與最低點、及坐標軸交點等特性）．（15 分）

(2) 試求 $|\sin x|=\frac{x}{10}$ 之實數解個數．（15 分）

解：

(1) $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2\cos(2x)+1$，

週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，如右圖

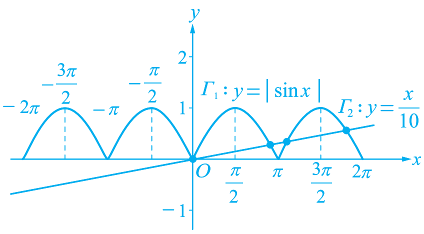


$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]+1$ 的圖形為 $y=\cos 2x$ 之圖形反向兩倍高，再上移 1 單位

(2) 圖解法：令 $\Gamma_1: y=|\sin x|$，$\Gamma_2: y=\frac{x}{10}$

如右圖，原方程式之實數解個數即 Γ_1，Γ_2 圖形之交點個數，由右圖可得

故所求有 4 個實數解



3. 設 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=2\sin^2 x-\cos x+1$，試以區間表示 $f(x)$ 之值域．（25 分）

解：$f(x)=2\sin^2 x-\cos x+1=2(1-\cos^2 x)-\cos x+1=-2\cos^2 x-\cos x+3$

$$=-2\left[\cos^2 x+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos x+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+3+\frac{1}{8}=-2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$$

$\because x\in\mathbb{R}\quad\therefore -1\le\cos x\le 1$

$\Rightarrow -\frac{3}{4}\le\cos x+\frac{1}{4}\le\frac{5}{4}\Rightarrow 0\le\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2\le\frac{25}{16}$

$\Rightarrow -\frac{25}{8}\le -2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2\le 0\Rightarrow 0\le -2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}\le\frac{25}{8}$

故所求 $f(x)$ 之值域為 $\left[0,\frac{25}{8}\right]$

4. 試比較下列各數大小：$a=\tan\left(-\frac{27\pi}{11}\right)$，$b=\tan\left(-\frac{18\pi}{11}\right)$，$c=\tan\left(\frac{6\pi}{11}\right)$，$d=\tan\left(\frac{12\pi}{11}\right)$，$e=\tan\left(\frac{27\pi}{11}\right)$．（25 分）

解：

$a=\tan\left(-\frac{27\pi}{11}\right)=-\tan\left(2\pi+\frac{5\pi}{11}\right)=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)<0$，

$b=\tan\left(-\frac{18\pi}{11}\right)=-\tan\left(2\pi-\frac{4\pi}{11}\right)=\tan\left(\frac{4\pi}{11}\right)>0$，

$c=\tan\left(\frac{6\pi}{11}\right)=\tan\left(\pi-\frac{5\pi}{11}\right)=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)=a$，

$d=\tan\left(\frac{12\pi}{11}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{11}\right)<\tan\left(\frac{4\pi}{11}\right)=b$

$e=\tan\left(\frac{27\pi}{11}\right)=\tan\left(2\pi+\frac{5\pi}{11}\right)=\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)>\tan\left(\frac{4\pi}{11}\right)=b$

故可得 $e>b>d>0>a=c$ 即為所求