

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.06.15				
範圍	3-1 三角函數的圖形	班級		姓名
		座號		

一、多選題 (每題 10 分)

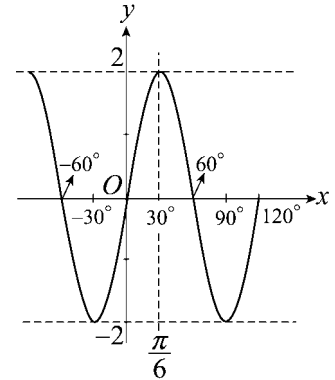
( ) 1. 考慮函數  $f(x) = 2\sin 3x$ ，試問下列選項何者為真？

- (1)  $-2 \leq f(x) \leq 2$  (2)  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  時有最大值 (3)  $f(x)$  的週期為  $\frac{2\pi}{3}$   
 (4)  $f(x)$  的圖形對稱於直線  $x = \frac{\pi}{6}$  (5)  $f(4) > 0$  .

**解答** 134

**解析** 利用描點繪圖如附圖：

$x$	$-120^\circ$	$-60^\circ$	$-30^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$
$y$	0	0	-2	0	2	0	-2	0



- (1)  (2) :  $x = \frac{\pi}{6}$  時有最大值 (3)  (4)   
 (5) :  $f(4) = 2\sin 12 \doteq 2\sin 684^\circ = 2\sin 324^\circ < 0$

( ) 2. 下列哪些三角函數的週期是  $\pi$ ？

- (1)  $y = \sin 2x$  (2)  $y = \cos 2x$  (3)  $y = \sin \frac{1}{2}x$  (4)  $y = \frac{1}{2}\cos x$  (5)  $y = -\tan x$  .

**解答** 125

**解析** (1)  (2)  (3) : 週期為  $4\pi$  (4) : 週期為  $2\pi$  (5)

( ) 3. 試問下列各函數之週期何者與  $y = \tan x$  之週期相同？

- (1)  $y = \sin x$  (2)  $y = \cos x$  (3)  $y = \cot x$  (4)  $y = \sin 2x$  (5)  $y = \sin \frac{x}{2}$  .

**解答** 34

**解析**  $y = \tan x \Rightarrow$  週期  $= \pi$

- (1) :  $\sin x \Rightarrow$  週期  $2\pi$  (2) :  $\cos x \Rightarrow$  週期  $2\pi$  (3) :  $\cot x \Rightarrow$  週期  $\pi$   
 (4) :  $\sin 2x \Rightarrow$  週期  $= \frac{2\pi}{2} = \pi$  (5) :  $\sin \frac{x}{2} \Rightarrow$  週期  $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

( ) 4. 設  $\theta$  為實數，則下列各函數中，何者之週期為  $2\pi$ ？

- (1)  $y = \sin(\theta + \sqrt{2})$  (2)  $y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$  (3)  $y = \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$  (4)  $y = \sqrt{2}\sin \theta$  (5)  $y = \sin \frac{x}{2}$  .

**解答** 124

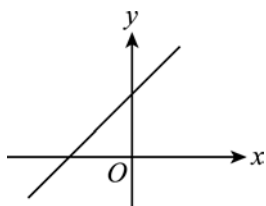
**解析** (1)  (2)  (3) : 週期  $= \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}\pi$  (4)  (5) : 週期  $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

( ) 5. 試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在  $x$  軸的上方？

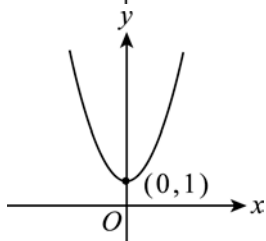
- (1)  $y = x + 100$  (2)  $y = x^2 + 1$  (3)  $y = 2 + \sin x$  (4)  $y = 2^x$  (5)  $y = \log x$  .

**解答** 234

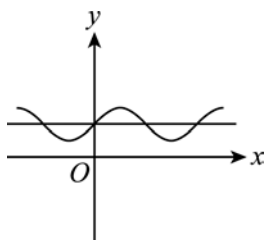
**解析** (1)  $\times$  .



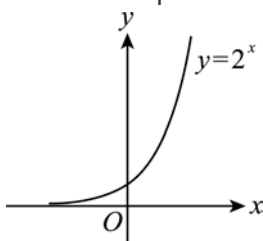
(2)  $\circ$  .



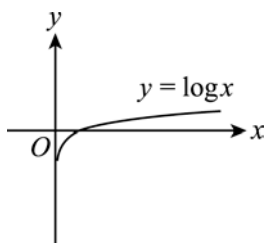
(3)  $\circ$  ,  $y = 2 + \sin x > 0$  .



(4)  $\circ$  ,  $y = 2^x > 0$  .



(5)  $\times$  .



( ) 6. 坐標平面上,  $\Gamma$  為  $y = f(x) = 2\cos\frac{x-1}{2} + 3$  的函數圖形, 則下列何者正確?

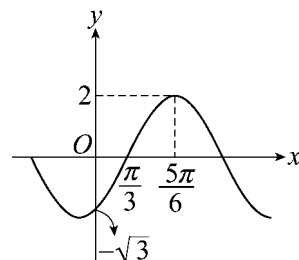
- (1) 函數  $y = f(x)$  的週期為  $\pi$  (2)  $\Gamma$  的振幅是  $y = \cos x$  的 2 倍 (3)  $\Gamma$  的振幅是  $y = \sin x$  的 2 倍 (4) 將  $y = 2\cos\frac{x}{2}$  作適當的平移可得  $\Gamma$  .

**解答** 234

**解析**  $\Gamma: y = f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) + 3$

- (1)  $\times$ : 週期為  $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$  (2)  $\circ$  (3)  $\circ$  (4)  $\circ$  .

( ) 7. 圖為某三角函數的部分圖形, 則此函數可能為何?



$$(1) y = 2\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \quad (2) y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (3) y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (4) y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(5) y = -2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

**解答** 45

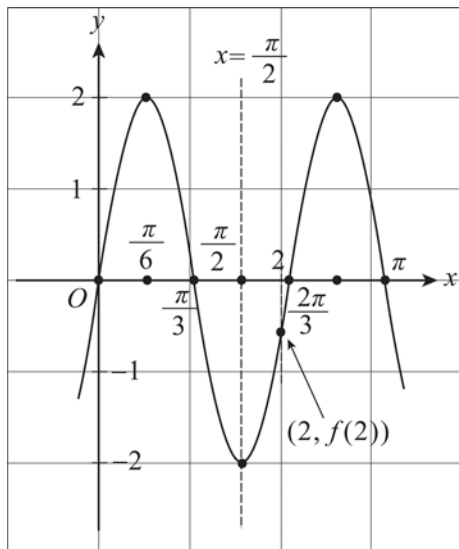
**解析** 由圖， $\therefore$ 週期 $=\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \times 4 = 2\pi$  振幅 $=2$ ，又過 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

( ) 8.關於函數  $f(x) = 2\sin 3x$ ，試問下列選項何者為真？

- (1)  $-2 \leq f(x) \leq 2$  (2)  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{6}$  時有最大值 (3)  $f(x)$  的週期為  $\frac{2\pi}{3}$
- (4)  $y = f(x)$  的圖形對稱於直線  $x = \frac{\pi}{2}$  (5)  $f(2) > 0$  .

**解答** 1234

**解析** 先作  $y = f(x) = 2\sin 3x$  的圖形，如下：



(1) 因為  $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ ，所以  $-2 \leq f(x) \leq 2$  .

(2)  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \frac{\pi}{2} = 2$  為最大值 . (3) 由上圖知：週期為  $\frac{2\pi}{3}$  .

(4) 因為以直線  $x = \frac{\pi}{2}$  為折線，對折後左右圖形會重合，所以函數圖形會對稱於  $x = \frac{\pi}{2}$  .

(5) 由上圖知：點  $(2, f(2))$  落在  $x$  軸下方，故  $f(2) < 0$  .

( ) 9.下列哪些函數的最小正週期為  $\pi$ ？

- (1)  $\sin x + \cos x$  (2)  $\sin x - \cos x$  (3)  $|\sin x + \cos x|$  (4)  $|\sin x - \cos x|$  (5)  $|\sin x| + |\cos x|$  .

**解答** 34

**解析** 依據定義：若  $f(x+p) = f(x)$ ， $p > 0$ ，則  $p$  稱為  $f(x)$  的正週期，而其中最小的  $p$  稱為  $f(x)$  的最小正週期 .

(1) 因  $f(x+\pi) = \sin(x+\pi) + \cos(x+\pi) = -\sin x - \cos x \neq \sin x + \cos x = f(x)$ ，

所以  $\pi$  不是正週期，那當然也就不是最小正週期。

(2) 因  $f(x+\pi) = \sin(x+\pi) - \cos(x+\pi) = -\sin x + \cos x \neq \sin x - \cos x = f(x)$ ,

所以  $\pi$  不是正週期，當然也就不是最小正週期。

(3) 因  $f(x+\pi) = |\sin(x+\pi) + \cos(x+\pi)| = |-\sin x - \cos x| = |\sin x + \cos x| = f(x)$ ,

又  $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x - \sin x| \neq |\sin x + \cos x| = f(x)$ ,

而其餘介於 0 與  $\pi$  之間的角度亦不會使函數不變，所以  $\pi$  是最小正週期。

(4) 因  $f(x+\pi) = |\sin(x+\pi) - \cos(x+\pi)| = |-\sin x + \cos x| = |\sin x - \cos x| = f(x)$ ,

又  $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x + \sin x| \neq |\sin x - \cos x| = f(x)$ ,

而其餘介於 0 與  $\pi$  之間的角度亦不會使函數不變，所以  $\pi$  是最小正週期。

(5) 因  $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| + |-\sin x| = |\sin x| + |\cos x| = f(x)$ ,

由於  $\frac{\pi}{2} < \pi$ ，所以  $\pi$  不是最小正週期。

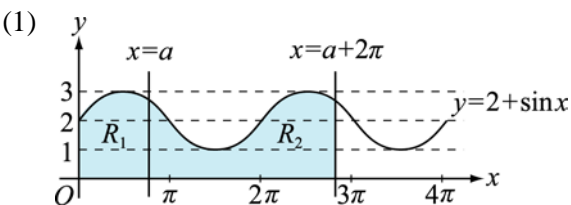
( ) 10. 設  $a > 0$ ，令  $A(a)$  表示  $x$  軸、 $y$  軸、直線  $x=a$  與函數  $y=2+\sin x$  的圖形所圍成的面積。

下列選項有哪些是正確的？ (1)  $A(a+2\pi) = A(a)$  恆成立 (2)  $A(2\pi) = 2A(\pi)$  (3)

$A(4\pi) = 2A(2\pi)$  (4)  $A(3\pi) - A(2\pi) > A(2\pi) - A(\pi)$ 。

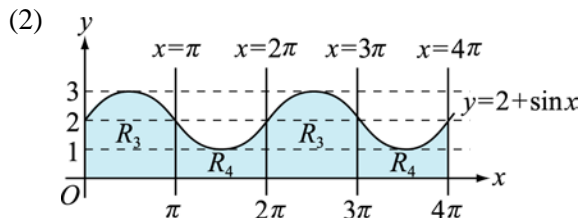
解答 34

解析



圖(一)

由圖(一)得： $A(a) = R_1$ ， $A(a+2\pi) = R_1 + R_2$ ，此時  $A(a+2\pi) \neq A(a)$ 。



圖(二)

由圖(二)得： $A(2\pi) = R_3 + R_4$ ， $A(\pi) = R_3$ ，因為  $R_3 \neq R_4$ ，所以  $A(2\pi) \neq 2A(\pi)$ 。

(3) 由圖(二)得： $A(4\pi) = 2R_3 + 2R_4$ ， $A(2\pi) = R_3 + R_4$ ，所以  $A(4\pi) = 2A(2\pi)$ 。

(4) 由圖(二)得： $A(3\pi) - A(2\pi) = (2R_3 + R_4) - (R_3 + R_4) = R_3$ ，

$$A(2\pi) - A(\pi) = (R_3 + R_4) - R_3 = R_4，$$

因為  $R_3 > R_4$ ，所以  $A(3\pi) - A(2\pi) > A(2\pi) - A(\pi)$ 。

( ) 11. 下列各敘述何者為真?

(1)  $y = \cos x$  的圖形對稱於  $x = -\frac{3\pi}{2}$     (2)  $y = \cos x$  的圖形對稱於  $x = -\frac{\pi}{2}$

(3)  $y = \sin x$  的圖形對稱於  $x = \frac{\pi}{2}$     (4)  $y = \sin x$  的圖形對稱於  $x = \frac{3\pi}{2}$  .

**解答** 34

**解析**  $y = \sin x$  與  $y = \cos x$  之對稱軸均為鉛直線，且通過圖形之最高點或最低點

## 二、填充題 (每題 10 分)

1.  $y = 4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  之圖形是由  $y = 4\cos\frac{x}{2}$  之圖形向  $x$  軸正方向平移\_\_\_\_\_ .

**解答**  $\frac{\pi}{3}$

**解析**  $y = 4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$  ,  $\therefore$  向  $x$  軸正方向平移  $\frac{\pi}{3}$  .

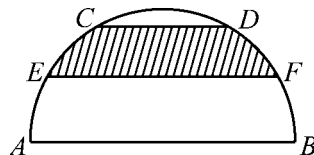
2. 函數  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$  的對稱軸為  $x = \alpha$  ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$  , 求  $\alpha =$ \_\_\_\_\_ .

**解答** 0 或  $\frac{\pi}{2}$

**解析**  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$  對稱軸在極大或極小值點,  $\therefore$  令  $2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$  或  $2x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0$  或  $\frac{\pi}{2}$  .

3. 如圖，以  $\overline{AB} = 2$  為直徑畫一半圓，二弦  $\overline{CD}$  ,  $\overline{EF}$  均平行於直徑  $\overline{AB}$  , 已知  $\overline{CD} = 1$  ,  $\overline{EF} = \sqrt{3}$  , 求斜線部分: (1)面積=\_\_\_\_\_ , (2)周長=\_\_\_\_\_ .

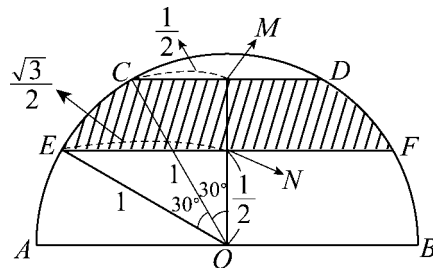


**解答** (1)  $\frac{\pi}{6}$ ; (2)  $1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

**解析** (1)面積 =  $\left( \begin{array}{c} \triangle CMO \\ + \triangle EON \\ - \triangle EON \end{array} \right) \times 2$

$$= \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 2 = \frac{\pi}{6} .$$

$$(2) \text{周長} = \overline{CD} + \overline{EF} + 2\widehat{CE} = 1 + \sqrt{3} + 2 \times \frac{\pi}{6} = 1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} .$$



4.  $\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \sin \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{5\pi}{4} \cdot \sin \frac{7\pi}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

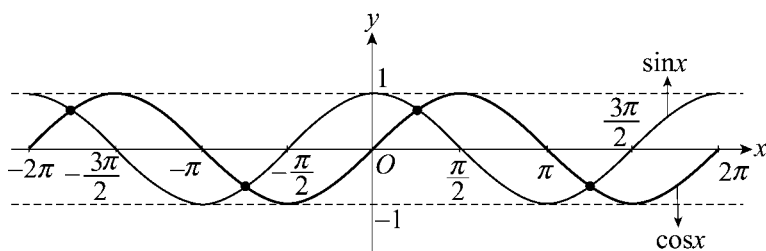
**解答**  $\frac{1}{4}$

**解析** 原式 =  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  .

5.  $y = \sin x$  與  $y = \cos x$  在  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  之交點的個數為            個 .

**解答** 4

**解析**



共有 4 個交點 .

6. 函數  $y = 3\sin x$  的週期為            .

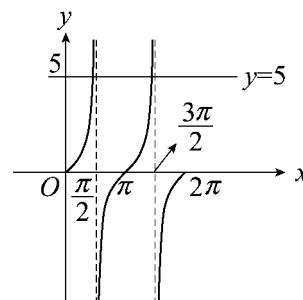
**解答**  $2\pi$

**解析**  $2\pi$  .

7.  $0 \leq x \leq 2\pi$  , 直線  $y = 5$  與函數  $y = \tan x$  的圖形共有            個交點 .

**解答** 2

**解析** 由圖, 有 2 個交點 .



8.  $f(x) = \sin(1 + \pi x)$  , 則  $f(x)$  之週期為            .

**解答** 2

**解析** 週期 =  $\frac{2\pi}{\pi} = 2$  .

9. 求下列各三角函數值:

- (1)  $\cos \frac{2\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$       (2)  $\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$       (3)  $\tan \frac{5\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$   
 (4)  $\cot \frac{25\pi}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$       (5)  $\sec \left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$       (6)  $\csc \frac{7\pi}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答** (1)  $-\frac{1}{2}$ ; (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; (3)  $-\sqrt{3}$ ; (4)  $\sqrt{3}$ ; (5)  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ ; (6)  $-1$

**解析** (1)  $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$(2) \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \tan\frac{5\pi}{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$(4) \cot\frac{25\pi}{6} = \cot\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$(5) \sec\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sec\frac{5\pi}{12} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$(6) \csc\frac{7\pi}{2} = \csc\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\csc\frac{\pi}{2} = -1.$$

10. 求下列各式之值：

$$(1) \frac{\sin(\pi + \theta) \cdot \tan^2(\pi - \theta)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \csc^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \sin\frac{39\pi}{4} \cdot \cos\frac{7\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{6} \cdot \cot\frac{\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**解答** (1) 1; (2)  $-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}$

**解析** (1) 原式 =  $\frac{(-\sin\theta)\tan^2\theta}{\sin\theta} - \frac{(-\cos\theta)\sec^2\theta}{\cos\theta} = -\tan^2\theta + \sec^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

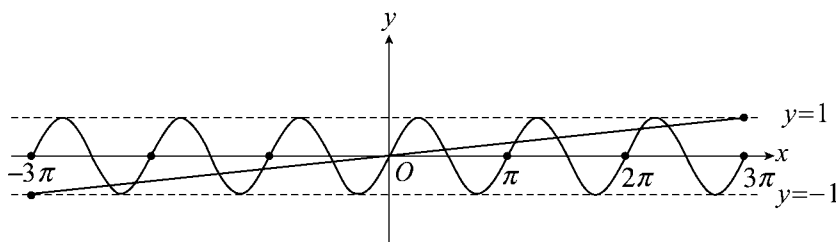
$$(2) \text{原式} = \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cot\frac{\pi}{3}$$

$$= -\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \left(-\tan\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}.$$

11. 方程式  $\sin 2x - \frac{1}{3\pi}x = 0$  有                      個實根。

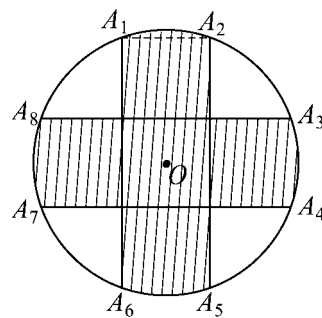
**解答** 11

**解析**  $\begin{cases} y = \sin 2x \\ y = \frac{1}{3\pi}x \end{cases}$  由圖：



交點有 11 個  $\Rightarrow$  11 個實根。

12. 如圖， $A_1, A_2, \dots, A_8$  等八個點，依次將圓周八等分。若圓半徑為 1，則(1)線段  $\overline{A_1A_2}$  長為\_\_\_\_\_，(2)斜線部分面積為\_\_\_\_\_。



**解答** (1)  $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ; (2)  $\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 2$

**解析** 設圓心為  $O$ ，因  $A_1, A_2, \dots, A_8$  將圓周八等分

$$\therefore \angle A_1OA_2 = \frac{1}{8} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

於  $\triangle A_1OA_2$  與  $\triangle A_2OA_5$  中，由餘弦定律知

$$\overline{A_1A_2}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow \overline{A_1A_2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\overline{A_2A_5}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{3\pi}{4} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \overline{A_2A_5} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

斜線部分面積 = 4(弓形  $A_1A_2$ ) + 2(矩形  $A_1A_2A_5A_6$ ) - (中央的正方形)

$$\begin{aligned} &= 4 \left( \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{4} \right) + 2 \left( \sqrt{2 - \sqrt{2}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) - \left( \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

13. 設  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  五點將一圓周分成五段弧，其長成等差數列，若最長弧與最短弧之弧長之比為 6:1，則最短弧之圓心角為\_\_\_\_\_，又五邊形  $P_1P_2P_3P_4P_5$  之最大內角與最小內角之弧度量分別為\_\_\_\_\_。

**解答** (1)  $\frac{4\pi}{35}$ ; (2) 最大角  $\frac{57\pi}{70}$ ，最小角  $\frac{27\pi}{70}$

**解析** 設以  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  表五段弧之長，其所對之中心角為  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  因弧長

成等差數列，故中心角亦成等差數列  $\left( \theta_i = \frac{S_i}{r} \right)$

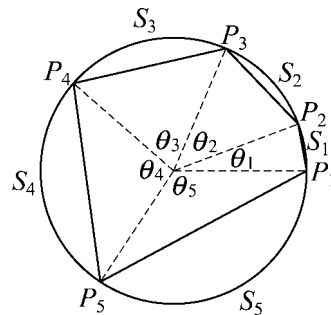
令公差為  $d$ ，則

$$\begin{cases} (\theta_3 - 2d) + (\theta_3 - d) + \theta_3 + (\theta_3 + d) + (\theta_3 + 2d) = 2\pi \\ \frac{\theta_3 + 2d}{\theta_3 - 2d} = \frac{S_5/r}{S_1/r} = \frac{S_5}{S_1} = \frac{6}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_3 = \frac{2\pi}{5} \\ d = \frac{5}{14}\theta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_3 = \frac{2\pi}{5} \\ d = \frac{\pi}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{4\pi}{35}, \theta_2 = \frac{9\pi}{35}, \theta_4 = \frac{19\pi}{35}, \theta_5 = \frac{24\pi}{35}$$

$$\text{如圖最大角為 } \angle P_2 = \frac{1}{2}(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) = \frac{57\pi}{70}$$

$$\text{最小角為 } \angle P_5 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{27\pi}{70}.$$



14. 一扇形之周長固定為  $k$ ，若其半徑為  $r$ ，圓心角為  $\theta$ ，則：



(1)以  $k$ 、 $r$  表  $\theta$  時， $\theta =$ \_\_\_\_\_。

(2)①當  $\theta =$ \_\_\_\_\_時，②扇形面積  $A =$ \_\_\_\_\_為最大。

**解答** (1)  $\frac{k-2r}{r}$ ; (2)①2, ②  $\frac{k^2}{16}$

**解析** 由題意得  $2r + r\theta = k$  (1)  $\theta = \frac{k-2r}{r}$

$$(2) \text{扇形面積 } A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$\because k = 2r + r\theta \geq 2\sqrt{2r \times r\theta} = 4\sqrt{A}$$

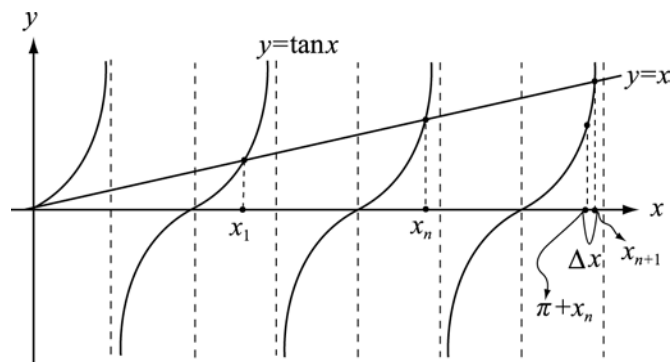
$$\therefore 2r = r\theta, \text{ 即 } \theta = 2 \text{ 時, } A \text{ 有最大值 } \frac{k^2}{16}.$$

15. 將  $\tan x = x$  的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) =$

\_\_\_\_\_。(四捨五入到小數第二位)

**解答** 3.14

**解析** 因為  $y = \tan x$  與  $y = x$  兩圖形交點的  $x$  坐標就是方程式  $\tan x = x$  的實根，



$$\text{由上圖知: } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\pi + x_n + \Delta x) - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi + \Delta x)$$

$$= \pi + \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = \pi + 0 = \pi \doteq 3.14.$$

16. 坐標平面上有一扇形  $AOB$  (其中  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  為半徑)，其中  $O(0,0)$ ,  $A(\sqrt{3},3)$ ,  $B(-2\sqrt{3},0)$ ，若

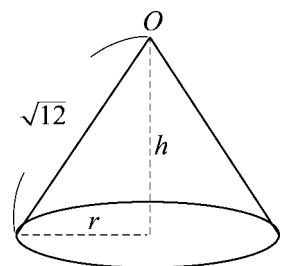
$\angle AOB < \pi$ ，則：(1)扇形  $AOB$  的面積為\_\_\_\_\_。

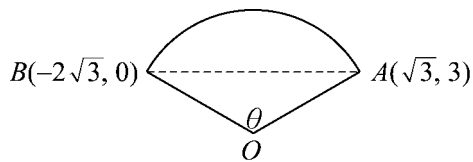
(2)若將扇形  $AOB$  以  $O$  為頂點，捲成一個直圓錐體的側面，且無重疊部分 (即  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  重合)，則此直圓錐體的高為\_\_\_\_\_。

**解答** (1)  $4\pi$ ; (2)  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$

**解析**  $\because \overline{OA} = \sqrt{12}$ ,  $\overline{OB} = \sqrt{12}$ ,  $\overline{AB} = 6$

$$\therefore \cos \theta = \frac{(\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12})^2 - 6^2}{2 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \quad (\because \angle AOB < \pi)$$





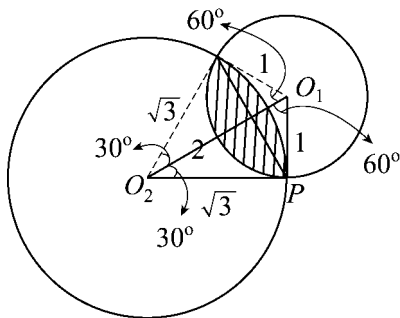
(1) 扇形  $AOB$  面積  $= \frac{1}{2} \times (\sqrt{12})^2 \times \frac{2\pi}{3} = 4\pi$

(2)  $\because 2\pi r = \sqrt{12} \times \frac{2\pi}{3} \quad \therefore r = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad h = \sqrt{(\sqrt{12})^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}.$

17. 設  $\triangle O_1O_2P$  中,  $\angle P = 90^\circ$ ,  $\overline{O_1P} = 1$ ,  $\overline{O_2P} = \sqrt{3}$ , 分別以  $O_1$  及  $O_2$  為圓心,  $\overline{O_1P}$  與  $\overline{O_2P}$  為半徑作圓, 則兩圓形區域共同部分之面積 = \_\_\_\_\_.

**解答**  $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$

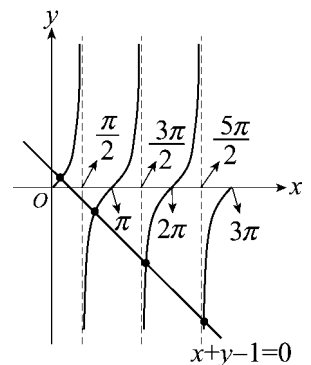
**解析** 所求 =  $= \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times 2 = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$



18. 當  $0 \leq x \leq 3\pi$  時, 直線  $x + y - 1 = 0$  與函數  $y = \tan x$  的圖形共有 \_\_\_\_\_ 個交點.

**解答** 4

**解析**  $y = \tan x$  與  $x + y - 1 = 0$   
在  $0 \leq x \leq 3\pi$  時有 4 個交點.



19. 已知一扇形之周長為 60 公分, 今欲得最大之扇形面積, 則

(1) 其半徑為 \_\_\_\_\_ 公分, (2) 此時其面積為 \_\_\_\_\_ 平方公分, (3) 又中心角為 \_\_\_\_\_ 弧度.

**解答** (1) 15; (2) 225; (3) 2

**解析** 由題意得  $2r + \theta r = 40$

由算數平均  $\geq$  幾何平均, 得  $\frac{2r + \theta r}{2} \geq \sqrt{2\theta r^2}$

$400 \geq 2\theta r^2 \Rightarrow 100 \geq \frac{1}{2}\theta r^2, \therefore$  最大面積為 100

此時  $2r = \theta r = 20 \Rightarrow r = 10, \theta = 2$

$\therefore$  半徑為 10 公分, 面積最大為 100 平方公分, 中心角為 2 弧度.