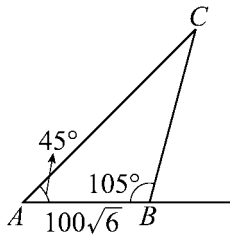
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.06.08					
範圍	2-6 三角測量	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分）（已知$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$， $\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$）

1. 船C，從岸上兩個瞭望臺A， B，測得$\angle ABC=105^\circ$， $\angle BAC=45^\circ$，若A， B相距$100\sqrt{6}$公尺，則船C與瞭望臺A之距離爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答 $100\left(3+\sqrt{3}\right)$

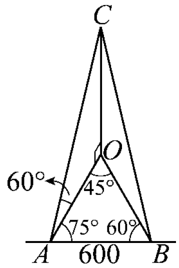
解析 $\angle ACB=180^\circ-105^\circ-45^\circ=30^\circ$，由正弦定理知$\dfrac{100\sqrt{6}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 105^\circ}$



$$\overline{AC}=\frac{100\sqrt{3}\times\sin 105^\circ}{sib30^\circ}=\frac{100\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=100\left(3+\sqrt{3}\right)$$．

2. 某人隔著一條河，想測量河對岸一座山的高度．當他在A點時，測得山的方位爲東偏北75°，而山頂的仰角爲60°；若此人自A點向東行 600 公尺到達B點，此時山的方位變成在西偏北60°．則山的高度爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答 $900\sqrt{2}$



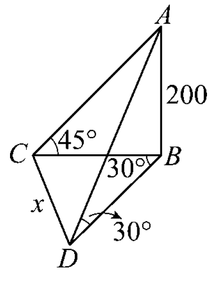
解析 由$\triangle AOC$，設$\overline{CO}=h\Rightarrow\overline{AO}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

由$\triangle AOB\Rightarrow\dfrac{600}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AO}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\overline{AO}=\dfrac{600\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

$$\frac{h}{\sqrt{3}}=\frac{600\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow h=\frac{600\times 3}{\sqrt{2}}=900\sqrt{2}$$（公尺）．

3. 在懸崖$\overline{AB}$之頂A處，測得一船在正西方向C處，且俯角爲45°，5 分鐘後再測得船在西30°南D處，且其俯角爲30°，已知$\overline{AB}=200$公尺，求船速度爲每小時＿＿＿＿＿＿公里．

解答 2.4



解析 $\triangle ABC$中，知$\overline{CB}=200$，$\triangle ABD$中，知$\overline{BD}=200\sqrt{3}$

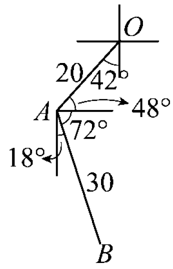
設$\overline{CD}=x$，$\triangle BCD$中，由餘弦定理 $\overline{CD}^2=\overline{BD}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BD}\times\overline{BC}\cos 30^\circ$

$\therefore x^2=\left(200\sqrt{3}\right)^2+\left(200\right)^2-2\left(200\sqrt{3}\right)\left(200\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=200$，

5 分鐘 200 公尺，$\therefore$時速$=2.4$（公里／小時）．

4. 在燈塔南42°西 20 浬處，有一船正以每小時 15 浬的速度朝南18°東的方向航行，試問兩小時後該船距離燈塔爲＿＿＿＿＿＿浬．

解答　$10\sqrt{19}$



解析　$\triangle AOB$ 中

$$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2-2\overline{OA}\times\overline{AB}\times\cos120°$$

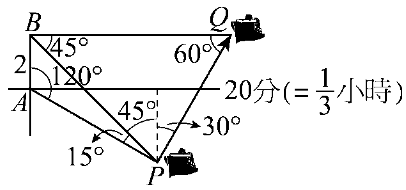
$$=(20)^2+(30)^2-2\times20\times30\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1900$$

$\therefore \overline{OB}=10\sqrt{19}$（浬）．

5. 海岸上有 A，B 兩座燈塔，B 在 A 之正北 2 公里處，一船在上午 10 點 10 分測得 A 在北 $60°$ 西，B 在北 $45°$ 西之方向．若此船依北 $30°$ 東的方向航行 20 分鐘，又測得 B 在正西，則此船的時速為______公里．

解答　$6\left(\sqrt{3}+1\right)$

解析　如圖：



在 $\triangle ABP$ 中，$\dfrac{\overline{BP}}{\sin120°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin15°}$

$$\therefore \overline{BP}=\frac{\overline{AB}\times\sin120°}{\sin15°}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

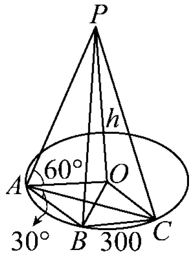
又 $\triangle BPQ$ 中，$\dfrac{\overline{PQ}}{\sin45°}=\dfrac{\overline{BP}}{\sin60°}$，$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{\sin45°\times\overline{BP}}{\sin60°}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$\therefore \text{時速}=\frac{\overline{PQ}\text{（公里）}}{\frac{1}{3}\text{（小時）}}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=3\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=6\left(\sqrt{3}+1\right)\text{（公里／小時）．}$$

6. 在地面上的三點 A，B，C，測得某山頂的仰角均為 $75°$，若 $\angle BAC=30°$，$\overline{BC}=300$ 公尺，求此山的高度為____________公尺．

解答　$600+300\sqrt{3}$

解析　設山高 $\overline{OP}=h$　$\because$ 仰角均為 $75°$，$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R=h\cot75°=\left(2-\sqrt{3}\right)h$



$\Rightarrow A$，B，C 共圓，且外接圓半徑 $R=\left(2-\sqrt{3}\right)h$

$\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\Rightarrow \dfrac{300}{\sin30°}=2\left(2-\sqrt{3}\right)h$　$\Rightarrow 300=\left(2-\sqrt{3}\right)h$

$$\therefore h=\frac{300}{2-\sqrt{3}}=300\left(2+\sqrt{3}\right)=600+300\sqrt{3}\text{（公尺）．}$$

7. 從地面上共線之三點 A，B，C 觀看空中一氣球，其仰角分別爲 $60°$，$45°$，$30°$．若 $\overline{AB}=40$ 公尺，$\overline{BC}=60$ 公尺，求氣球之高度爲____________公尺．

解答　$20\sqrt{15}$

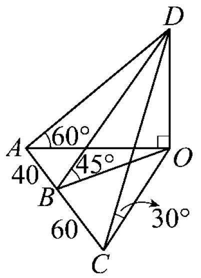
解析　根據題目所給定的已知條件⇒圖形不爲平面型

由（圖一）⇒設 $\overline{OD}=h \Rightarrow \overline{OA}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$\overline{OB}=h$，$\overline{OC}=\sqrt{3}h$

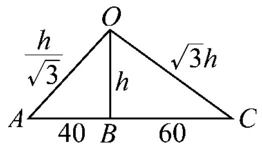
$$\text{由（圖二）} \Rightarrow \cos A=\frac{40^2+\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2-h^2}{2\times 40\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}}=\frac{\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2+100^2-\left(\sqrt{3}h\right)^2}{2\times 100\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1600-\dfrac{2h^2}{3}}{2}=\frac{10000-\dfrac{8h^2}{3}}{5} \Rightarrow 4000-\frac{5}{3}h^2=10000-\frac{8h^2}{3}$$

$\therefore h^2=6000 \Rightarrow h=20\sqrt{15}$（公尺）．

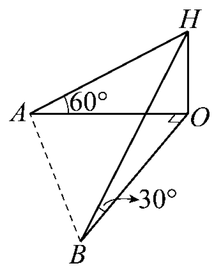


$\Rightarrow$



（圖一）　　（圖二）

8. 分別由某座鐵塔的正西方 A 點處與正南方 B 點處，測得塔頂的仰角爲 $60°$ 與 $30°$，且鐵塔的高度爲 20 公尺，試求 A 點與 B 點的距離爲____________公尺．

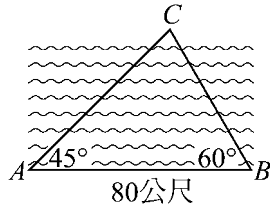


解答　$\dfrac{20}{3}\sqrt{30}$

解析　$\overline{OH}=$ 塔高 $=20$ 公尺 $\Rightarrow \overline{OA}=\dfrac{20}{\sqrt{3}}$，$\overline{OB}=20\sqrt{3}$

$\because \angle AOB=90°$，$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=20\sqrt{\dfrac{1}{3}+3}=\dfrac{20}{3}\sqrt{30}$（公尺）．

9. 如圖，A，B 兩點在河的同側，A，C 兩點在河的異側，已知 $\angle CAB=45°$，$\angle CBA=60°$，$\overline{AB}=80$ 公尺，求 $\overline{AC}$ 之長爲____________公尺．



解答　$120\sqrt{2}-40\sqrt{6}$

解析　$\angle ACB=180°-45°-60°=75°$

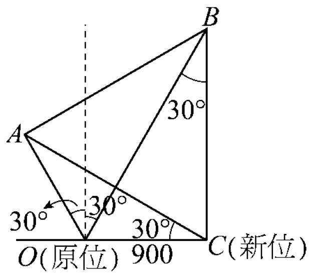
由正弦定理：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 75°} \Rightarrow \overline{AC}=\dfrac{\overline{AB}\sin 60°}{\sin 75°}=80\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=40\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，

故 $\overline{AC}=120\sqrt{2}-40\sqrt{6}$（公尺）．

10.一船往正東航行，在其左側發現二燈塔 A，B，A 在其北 $30°$ 西，B 在其北 $30°$ 東，該船行駛 900

公尺後，再測 A，B，A 在其北 $60°$ 西，B 在其正北，試求 A，B 兩燈塔的距離爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答　$900\sqrt{3}$



解析　$\triangle AOC$ 中，$\angle AOC=120°$，$\angle ACO=30°$　　$\therefore \overline{OA}=\overline{OC}=900$

$\triangle OBC$ 中，$\angle CBO=30°$，$\overline{OB}=1800$

$\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=60°$

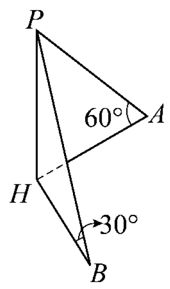
$$\therefore \overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2-2\times\overline{AO}\times\overline{BO}\times\cos 60°$$

$$=(900)^2+(1800)^2-2(900)(1800)\cdot\frac{1}{2}=3\cdot 900^2\ ,$$

$\therefore \overline{AB}=900\sqrt{3}$（公尺）．

11.一塔高 100 公尺，在塔北 $60°$ 東 A 處和南 $30°$ 東 B 處各有一觀測站，測出塔的仰角分別爲 $60°$ 及 $30°$，則 A 和 B 二處的距離爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答　$\dfrac{100\sqrt{30}}{3}$



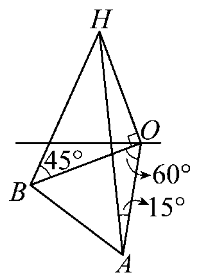
解析　塔高 $\overline{PH}=100$，$\triangle ABH$ 中，$\angle AHB=90°$，$\overline{AH}=\dfrac{100}{\sqrt{3}}$，$\overline{BH}=100\sqrt{3}$

$$\therefore \overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(100\sqrt{3}\right)^2=\frac{10}{3}\times 100^2$$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\frac{10}{3}}\times 100=\frac{100\sqrt{30}}{3}\text{（公尺）．}$$

12.有一山丘高 150 公尺，在此山丘的正南方有一座學校 A，而在其（山丘）南 $60°$ 西有一座寺廟 B，若已知在山丘頂測得 A，B 之俯角分別爲 $15°$，$45°$；求學校和寺廟間的距離爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答　$150\sqrt{6+3\sqrt{3}}$



解析　$\triangle AOH$ 中，$\cot 15°=\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OH}}\Rightarrow \overline{AO}=\overline{OH}\times\cot 15°=150\left(2+\sqrt{3}\right)$

$\triangle HOB$ 中，$\overline{BO}=\overline{HO}=150$

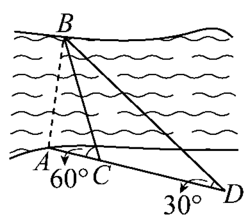
$\triangle OAB$ 中 $\angle AOB=60°$

$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2-2\overline{AO}\times\overline{BO}\times\cos 60°$$

$$=\left[150\left(2+\sqrt{3}\right)\right]^2+150^2-2\times 150\left(2+\sqrt{3}\right)\times 150\times\frac{1}{2}=150^2\left(6+3\sqrt{3}\right)$$

$\therefore \overline{AB}=150\sqrt{6+3\sqrt{3}}$．

13.如圖，A，B 兩點分別位於一河口的兩岸邊．某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 200 公尺的 D 點，分別測得 $\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°$，則 A 與 B 的距離爲＿＿＿＿＿＿公尺．



解答　$50\sqrt{7}$

解析　$\angle CBD=30°$ 且△ BCD 爲等腰三角形　$\therefore \overline{BC}=\overline{CD}=150$ 公尺

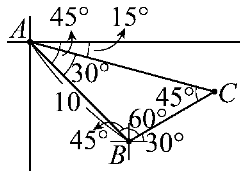
根據餘弦定理

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos 60°=50^2+150^2-2\times 50\times 150\times\cos 60°$$

$$=50^2\left[1^2+3^2-3\right]=50^2\times 7 \text{ , } \therefore \overline{AB}=50\sqrt{7}\text{（公尺）.}$$

14.海岸邊有 A， B 兩觀測站相距 10 浬， B 在 A 的東南方，兩觀測站同時發現一船發出求救信號，此船在 A 的東 $15°$ 南方，在 B 的東 $30°$ 北方，則船距 B ＿＿＿＿＿＿浬．

解答　$5\sqrt{2}$

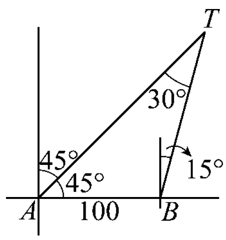


解析　由圖知：$\Rightarrow \dfrac{10}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 30°}$

$$\Rightarrow \overline{BC}=\frac{10\sin 30°}{\sin 45°}=10\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\text{（浬）.}$$

15.一觀測者 A 發現目標物 T 位在其北 $45°$ 東，而於 A 的東方 100 公尺處另一觀測者 B，發現同一目標 T 位在其北 $15°$ 東，求 $\overline{AT}$ 之長爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答　$50\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$



解析　由圖知：$\Rightarrow \angle ATB=180°-45°-105°=30°$

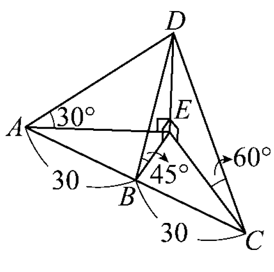
$\therefore$ 由正弦定理

$$\Rightarrow \frac{100}{\sin 30°}=\frac{\overline{AT}}{\sin 105°}\Rightarrow \overline{AT}=\frac{100\sin 105°}{\sin 30°}=100\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \overline{AT}=50\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{（公尺）.}$$

16.一直線上有 A, B, C 三點，測得某山頂之仰角分別爲 $30°$， $45°$， $60°$，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=30$ 公尺，則山高爲＿＿＿＿＿＿公尺．

解答　$15\sqrt{6}$

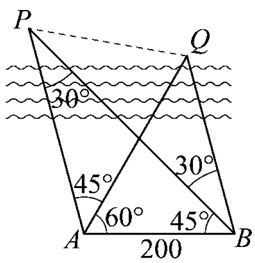


解析　設山高 $\overline{DE}=h$ ，則 $\overline{AE}=\sqrt{3}h$， $\overline{BE}=h$， $\overline{CE}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

△ ACE 中，利用中線定理：

$$\left(\sqrt{3}h\right)^2+\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2=2\left(h^2+30^2\right)\Rightarrow\frac{5}{3}h^2=h^2+30^2\Rightarrow h^2=30^2\times\frac{3}{2}$$

$$\therefore h=30\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=15\sqrt{6}\text{（公尺）.}$$



17.欲測得一河之同岸兩點間之距離 $\overline{PQ}$，如圖，已知 A， B 亦爲一河之同岸兩點， $\overline{AB}=200$， $\angle PAQ=45°$， $\angle QAB=60°$， $\angle ABP=45°$， $\angle PBQ=30°$，則 (1) $\overline{PB}=$＿＿＿＿＿＿；(2) $\overline{PQ}=$＿＿＿＿＿＿．

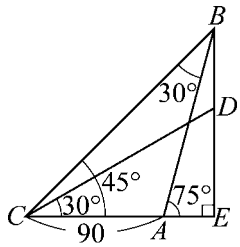
解答 (1)$100\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$;(2)$100\sqrt{8-2\sqrt{3}}$

解析 $\triangle ABP$ 中，由正弦定理 $\dfrac{\overline{PB}}{\sin 105^\circ}=\dfrac{200}{\sin 30^\circ}\Rightarrow \overline{PB}=200\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{2}{1}=100\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

$\triangle ABQ$ 中，由正弦定理 $\dfrac{\overline{BQ}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{200}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \overline{BQ}=100\sqrt{6}$

$\triangle PBQ$ 中，由餘弦定理得 $\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BQ}^2-2\overline{PB}\times\overline{BQ}\cos 30^\circ}=100\sqrt{8-2\sqrt{3}}$ ．

18.塔頂上插一旗桿，一人於某點測得塔頂、桿頂之仰角爲 30° 、 45° ，此人再向塔前進 90 公尺後，再測得桿頂之仰角爲 75° ，則塔高爲__________公尺．



解答 $15\left(3+\sqrt{3}\right)$

解析 圖中 $\overline{BD}$ 表旗桿， $\overline{DE}=h$ 表塔， $\overline{CD}=2h$ $(\because 30^\circ-60^\circ-90^\circ)$

於 $\triangle ABC$ 中， $\dfrac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ}=\dfrac{90}{\sin 30^\circ}$

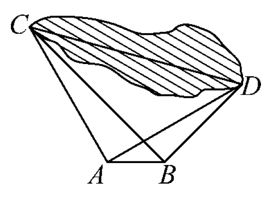
$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{90\times\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{90\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=90\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{2}{1}=45\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

於 $\triangle BCD$ 中， $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\left(90^\circ+30^\circ\right)}\Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{\overline{BC}\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}$

$\Rightarrow 2h=\dfrac{45\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=45\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=30\left(3+\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \overline{DE}=h=30\left(3+\sqrt{3}\right)\times\dfrac{1}{2}=15\left(3+\sqrt{3}\right)$（公尺）．

19.設一湖，欲測湖岸兩點 C ， D 的距離，已知湖岸築有鐵絲網不能靠近，今在鐵絲網外取兩點 A ， B ，得 $\overline{AB}=30$ 公尺，如圖，測得 $\angle CAB=120^\circ$ ， $\angle DBA=135^\circ$ ， $\angle DAB=30^\circ$ ， $\angle CBA=45^\circ$ ，則 $\overline{CD}=$__________公尺．

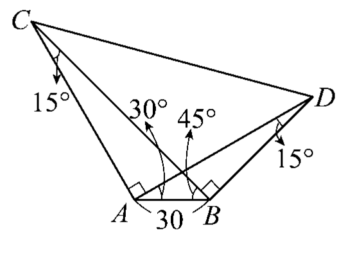


解答 $30\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

解析 可知 $\angle CAD=90^\circ=\angle CBD$ $\therefore C$ 、 D 、 B 、 A 四點共圓

$\therefore$ 由正弦定理 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 15^\circ}=2R=\dfrac{\overline{CD}}{\sin 90^\circ}$ ，

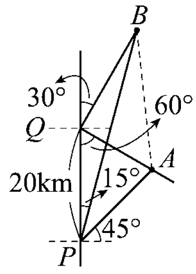
$\therefore \overline{CD}=\dfrac{30}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{120}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=30\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$（公尺）．



20.有一船自定點P往正北方向航行，在其右側發現有二燈塔A與B，經測量其方位：「A在北$45°$東，B在北$15°$東」，該船行駛 20 公里，到達Q點後，再測得二燈塔方位：「A在南$60°$東，B在北$30°$東」，試求：

(1)點Q與燈塔A的距離爲____________公里，

(2)兩燈塔的距離爲____________公里．



解答 (1) $20\left(\sqrt{3}-1\right)$;(2) $20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

解析 (1)△APQ中，$\overline{PQ}=20$，$\angle A=75°$，$\angle APQ=45°$

$$\therefore \frac{\overline{AQ}}{\sin 45°}=\frac{20}{\sin 75°} \Rightarrow \overline{AQ}=20\times\sin 45°\times\frac{1}{\sin 75°}$$

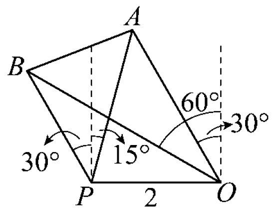
$$=20\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \quad =20\left(\sqrt{3}-1\right)\text{（公里）}.$$

(2)△BPQ中，$\angle PBQ=180°-90°-60°-15°=15°=\angle BPQ$，　$\therefore \overline{BQ}=\overline{PQ}=20$

又△ABQ中，$\angle AQB=30°+60°=90°$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{20^2+\left[20\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2} \quad =20\sqrt{5-2\sqrt{3}}\text{（公里）}.$$

21.有一條東西向的筆直公路，某甲由東往西行走，在其右側發現兩處突出的建築物A與建築物B，A在出發點O的北$30°$西，B在點O的北$60°$西．當某甲往西走 2 公里到達P點後，發現B在其北$30°$西，A在其北$15°$東處，試求：(1) $\overline{PA}=$____________公里．(2) $\overline{AB}=$____________公里．



解答 (1) $\sqrt{6}$;(2) $\sqrt{10-4\sqrt{3}}$

解析 (1)△PAO中，$\angle PAO=180°-75°-60°=45°$

由正弦定理：$\dfrac{\overline{AP}}{\sin\left(\angle POA\right)}=\dfrac{\overline{PO}}{\sin\left(\angle PAO\right)}$

$$\overline{PA}=\frac{2}{\sin 45°}\times\sin 60°=\sqrt{6}\text{（公里）}.$$

(2)△PBO中，$\dfrac{\overline{PB}}{\sin\left(\angle POB\right)}=\dfrac{\overline{PO}}{\sin\left(\angle PBO\right)} \Rightarrow \overline{PB}=\dfrac{2}{\sin 30°}\times\sin 30°=2$

△APB中，$\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-2\overline{PA}\times\overline{PB}\times\cos\left(\angle BPA\right)$

$$=\left(\sqrt{6}\right)^2+2^2-2\times\sqrt{6}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} \quad =10-4\sqrt{3}$$

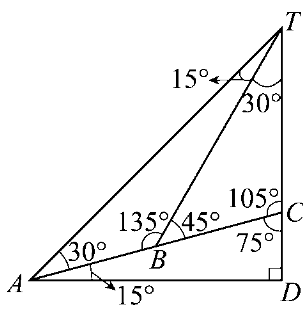
$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{10-4\sqrt{3}}\text{（公里）}.$$

22.傾斜$15°$的斜坡頂端有一塔，於坡上一點A測得塔之視角（物體兩端與觀測點連線之夾角）爲$30°$，沿坡道上行 100 公尺至B點，再測塔之視角爲$45°$，則塔高爲____________公尺．

解答 $100\sqrt{2}$

解析 如圖

△ABT中，$\overline{AB}=100$，$\angle TAC=30°$，$\angle TBA=135° \Rightarrow \angle ATB=15°$

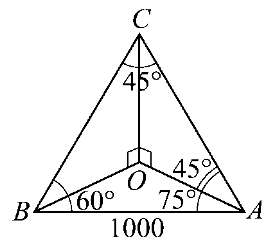


$$\frac{\overline{TB}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 15^\circ}\Rightarrow \overline{TB}=\frac{100\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}=100\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{200}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$\triangle BCT$ 中，$\angle TCB=105^\circ$，$\angle BTC=30^\circ$，得

$$\frac{\overline{TC}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{TB}}{\sin 105^\circ}\Rightarrow \overline{TC}=\frac{\overline{TB}\times\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{200}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=100\sqrt{2}$$（公尺）．

23.若 A，B 爲地面上兩點且 $\overline{AB}=1000$ 公尺，今從 A 測得高空一氣球 C 之仰角爲 45°，若 $\angle CAB=75^\circ$ 且 $\angle CBA=60^\circ$，則氣球之高度爲__________公尺．



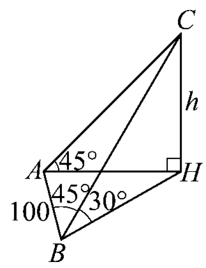
解答 $500\sqrt{3}$

解析 如圖

$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{1000}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow \overline{AC}=500\sqrt{6}$

$\therefore \overline{OC}=\overline{OA}=\dfrac{\overline{AC}}{\sqrt{2}}=500\sqrt{3}$（公尺）．

24.在 A 點測得塔頂 C 的仰角爲 45°，在 B 點測得塔頂 C 的仰角爲 30°，$\angle ABC=45^\circ$ 且 $\overline{AB}=100$ 公尺，則塔高爲__________公尺．



解答 $50\sqrt{2}$

解析 設塔高 $\overline{CH}=h$，則 $\overline{AC}=\sqrt{2}h$，$\overline{BC}=2h$ 且 $\angle ABC=45^\circ$

由餘弦定理知 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 45^\circ$

$2h^2=100^2+4h^2-2\times 100\times 2h\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$h^2-100\sqrt{2}h+5000=0$ 得 $h=50\sqrt{2}$（公尺）．

25.P，Q 二燈塔，Q 在 P 之正北方 2 公里處，一船於某處測得 P 在船北 60° 西，Q 在船北 45° 西，此船依北 30° 東之方向航行 20 分鐘後，見 Q 在船正西方向，則此船之時速爲__________公里／小時．

解答 $6\left(\sqrt{3}+1\right)$

解析 $\triangle OPQ$ 中由正弦定理 $\dfrac{\overline{QO}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\overline{QP}}{\sin 15^\circ}\Rightarrow \overline{OQ}=\dfrac{2\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ}=\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

$\triangle OQO'$ 中，$\dfrac{\overline{OO'}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{OQ}}{\sin 60^\circ}$

$\therefore \overline{OO'}=\dfrac{\overline{OQ}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$，$\therefore \overline{OO'}=2\left(\sqrt{3}+1\right)$

$\therefore$ 時速 $=3\overline{OO'}=6\left(\sqrt{3}+1\right)$（公里／小時）．