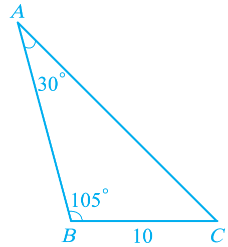
計算題（共 100 分）

（以下各題均假設 a，b，c 分別為 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 之對邊長）

1. (1) $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle B=105^\circ$，$\overline{BC}=10$，則 $\overline{AB}=$ ＿＿＿＿＿＿．（10 分）
   (2) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\angle A=83^\circ$，$\angle B=67^\circ$，則其外接圓半徑為＿＿＿＿＿＿．（15 分）

解：(1) $\triangle ABC$ 為 AAS 條件，

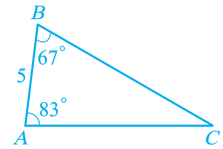


$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-30^\circ-105^\circ=45^\circ$

由正弦定律：$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{10}{\sin 30^\circ}$

$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{10}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$ 即為所求

(2) $\triangle ABC$ 為 ASA 條件，



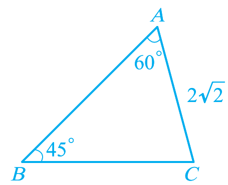
$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-83^\circ-67^\circ=30^\circ$

由正弦定律：$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow R=\dfrac{5}{2\times\sin 30^\circ}=\dfrac{5}{2\times\frac{1}{2}}=5$ 即為所求

2. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$b=2\sqrt{2}$，則 $\triangle ABC$ 之面積為＿＿＿＿＿＿．（20 分）

解：$\triangle ABC$ 為 AAS 條件，$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$



由正弦定律：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

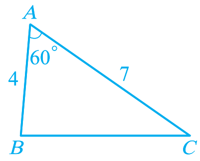
$\Rightarrow a=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$ 即為所求

3. (1) $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 60^\circ$，$\overline{AB} = 4$，$\overline{AC} = 7$，則 $\overline{BC} =$ ＿＿＿＿＿＿．（10 分）

(2) $\triangle ABC$ 三邊長為 $a = 12$，$b = 20$，$c = 28$，則$\angle C =$ ＿＿＿＿＿＿．（15 分）

解：(1) $\triangle ABC$ 為 SAS 條件，由餘弦定律：

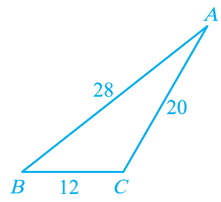


$\overline{BC}^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ$

$= 16 + 49 - 28 = 37$

$\therefore \overline{BC} = \sqrt{37}$ 即為所求

(2) $\triangle ABC$ 為 SSS 條件，由餘弦定律：



$$\cos C = \frac{12^2 + 20^2 - 28^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} = \frac{144 + 400 - 784}{480}$$

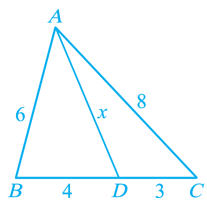
$$= \frac{-240}{480} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle C = 120^\circ$ 即為所求

4. (1) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = 6$，$\overline{AC} = 8$，若 D 為 $\overline{BC}$ 上一點且 $\overline{BD} = 4$，$\overline{CD} = 3$，則 $\overline{AD} =$ ＿＿＿＿＿＿．（15 分）

(2) $\triangle ABC$ 中，$a = 3$，$b = 5$，$c = 7$，則 $\overline{AB}$ 邊上中線之長為 ＿＿＿＿＿＿．（15 分）

解：(1) $\triangle ABC$ 為 SSS 條件，設 $\overline{AD} = x$，由餘弦定律：

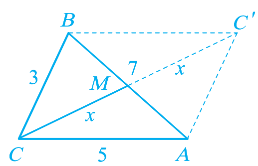


$$\cos B = \frac{6^2 + 4^2 - x^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} \Rightarrow \frac{52 - x^2}{4} = \frac{21}{7} = 3$$

$\Rightarrow 52 - x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 40$

$\therefore x = 2\sqrt{10}$ 即為所求

(2) 設 $\overline{CM} = x$ 為 $\overline{AB}$ 邊上之中線，由平行四邊形定理：



$(2\overline{CM})^2 + \overline{AB}^2 = 2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow (2x)^2 + 7^2 = 2(3^2 + 5^2) = 68$

$\Rightarrow 4x^2 + 49 = 68 \Rightarrow 4x^2 = 19$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ 即為所求