高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.06.01					
範圍	2-5 正、餘弦定理	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 （ 每題 10 分 ）

1. $\triangle ABC$ 中，$a:b:c=3:5:7$，求 $\dfrac{2\sin A+3\sin B}{\sin C}=$______________ .

解答 3

解析 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

令 $\sin A=3k$， $\sin B=5k$， $\sin C=7k$ ，則 $\dfrac{2\sin A+3\sin B}{\sin C}=\dfrac{6k+15k}{7k}=3$.

2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\angle A=87°$，$\angle B=63°$，求外接圓半徑 $R=$______________ .

解答 5

解析 $\angle C=180°-\angle A-\angle B=180°-87°-63°=30°$ ，$2R=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{5}{\sin 30°}\Rightarrow R=5$.

3. $\triangle ABC$ 中，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=9:8:7$，求

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=$________________________ . (2) $\cos A:\cos B:\cos C=$__________________________ .

解答 (1) $3:4:5$ (2) $4:3:0$

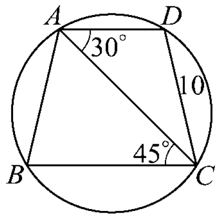
解析 $b+c=9k$， $a+c=8k$， $a+b=7k\Rightarrow a+b+c=12k\Rightarrow a=3k$， $b=4k$， $c=5k$

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:4:5$

(2) $\cos A:\cos B:\cos C=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}:\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{4^2+5^2-3^2}{2\cdot 4\cdot 5}:\dfrac{5^2+3^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 3}:\dfrac{3^2+4^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 4}=4:3:0$.

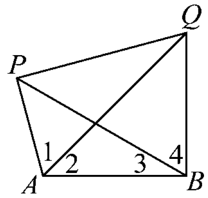
4. 圓內接四邊形中，$\angle CAD=30°$，$\angle ACB=45°$，$\overline{CD}=10$，求 $\overline{AB}=$______________ .



解答 $10\sqrt{2}$

解析 $\triangle ACD$ 中，$\dfrac{10}{\sin 30°}=2R$ ；$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}=2R$

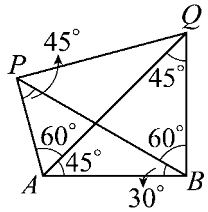
$\Rightarrow \dfrac{10}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}$ ； $\overline{AB}=\dfrac{10\times\sin 45°}{\sin 30°}=\dfrac{10\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=10\sqrt{2}$.



5. 如圖所示，設 $\overline{AB}=30$，$\angle 1=60°$，$\angle 2=45°$，$\angle 3=30°$，$\angle 4=60°$，求 $\overline{PQ}=$______________ .

解答 $15\sqrt{6}$

解析 SOL 一



由圖： $\triangle ABQ$ 爲 $45°-45°-90°$ 的三角形 $\quad\therefore \overline{AQ}=30\sqrt{2}$

又由正弦定理$\Rightarrow \dfrac{30}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{AP}}{\sin 30°}$ $\quad\therefore \overline{AP}=\dfrac{30}{\sqrt{2}}=15\sqrt{2}$

$\therefore$ 由 $\triangle APQ \Rightarrow \overline{PQ}^2 = \left(15\sqrt{2}\right)^2 + \left(30\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 15\sqrt{2}\times 30\sqrt{2}\times\cos 60^\circ$

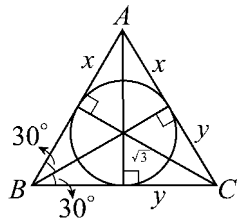
$= 450 + 1800 - 900 = 1350 \qquad \therefore \overline{PQ} = 15\sqrt{6}$.

SOL 二

$\Delta ABP, \Delta ABO$ 中，$\angle 1 = 60^\circ = \angle 2 \Rightarrow A, B, Q, P$ 共圓

故 $\dfrac{30}{\sin 45^\circ} = 2R = \dfrac{\overline{PQ}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \overline{PQ} = \dfrac{30\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 30\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{6}$

6. 設 $\triangle ABC$ 的周長爲 20，$\angle B = 60^\circ$，已知其內切圓半徑 $r = \sqrt{3}$，求其外接圓半徑 $R =$ ____________ .

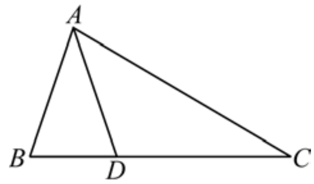


解答 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

解析 由圖 $\Rightarrow 2(3 + x + y) = 20 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow b = 7$

$\therefore \dfrac{7}{\sin 60^\circ} = 2R \qquad \therefore R = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

7. 如圖所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BC}$ 於 D；已知 $\overline{BD} = 3$，$\overline{DC} = 6$，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$，則 $\cos\angle BAD$ 之值爲__________ .



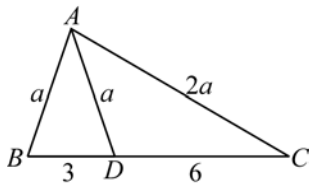
解答 $\dfrac{3}{4}$

解析 設 $\overline{AB} = a$，則 $\overline{AB} = \overline{AD} = a$，又 $\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 6 \Rightarrow \overline{AC} = 2a$，

另設 $\angle BAD = \theta = \angle CAD$，

$\triangle ABD$ 中，$\cos\theta = \dfrac{a^2 + a^2 - 3^2}{2\cdot a\cdot a} \cdots$①

$\triangle ACD$ 中，$\cos\theta = \dfrac{a^2 + (2a)^2 - 6^2}{2\cdot a\cdot 2a} \cdots$②



由①②得 $\dfrac{2a^2 - 9}{2a^2} = \dfrac{5a^2 - 36}{4a^2} \Rightarrow a^2 = 18$，

$\cos\theta = \dfrac{2a^2 - 9}{2a^2} = \dfrac{2\cdot 18 - 9}{2\cdot 18} = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$.

8. $\triangle ABC$ 的三邊滿足 $a - 2b + c = 0$，$3a + b - 2c = 0$，則

(1) $\sin A : \sin B : \sin C =$ ____________ .

(2) $\cos A =$ ____________，$\sin A =$ ____________ .

(3) $\triangle ABC$ 的周長 $15\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的外接圓的面積 = ____________ .

解答 (1) $3:5:7$;(2)① $\dfrac{13}{14}$ ② $\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$;(3) 49π

解析 (1) $\begin{cases} a - 2b + c = 0 \cdots (\text{I}) \\ 3a + b - 2c = 0 \cdots (\text{II}) \end{cases}$

$(\text{I})\cdot 2 + (\text{II}) \Rightarrow 5a - 3b = 0 \qquad \therefore a = \dfrac{3}{5}b$ 代回 (I) $\quad \Rightarrow \dfrac{3}{5}b - 2b + c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{7}{5}b$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \dfrac{3}{5}b : b : \dfrac{7}{5}b = 3 : 5 : 7$.

另解 $a:b:c=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=3:5:7$

(2)設 $a=3k$， $b=5k$， $c=7k$ ， $\cos A=\dfrac{49k^2+25k^2-9k^2}{2\cdot 7k\cdot 5k}=\dfrac{65}{70}=\dfrac{13}{14}$ 　且 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ ．

(3)$\because a:b:c=3:5:7$ 　且 $a+b+c=15\sqrt{3}$ ， $\therefore a=3\sqrt{3}$， $b=5\sqrt{3}$， $c=7\sqrt{3}$

又 $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow\dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}=2R\Rightarrow R=7$ 　$\therefore$外接圓面積$=49\pi$（平方單位）．

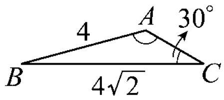
9.(1) $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$， $\overline{BC}=4\sqrt{2}$， $\angle C=30^\circ$，求 $\angle A=$__________ ．

(2) $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$， $\overline{BC}=4\sqrt{2}$， $\angle A=135^\circ$，求 $\angle C=$__________ ．

解答 (1) 45° 或 135°;(2) 30°

解析 (1)由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}\Rightarrow\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 　$\Rightarrow\angle A=45^\circ$ 或 135° ．

(2) $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{4}{\sin C}\Rightarrow\sin C=\dfrac{1}{2}$ 　$\Rightarrow\angle C=30^\circ,150^\circ$(不合)．

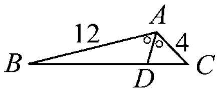


10. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=120^\circ$，$\overline{AC}=4$，$\overline{AB}=12$，$\angle A$ 的分角線交 $\overline{BC}$ 於 D，求 $\overline{AD}$ 的長爲__________ ．

解答 3

解析 $\triangle ABC$ 面積$=\triangle ABD$ 面積$+\triangle ACD$ 面積

設 $\overline{AD}=x$ ，$\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 4\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot x\cdot\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot\sin 60^\circ$



$48=16x\Rightarrow x=3$ 　故 $\overline{AD}$ 的長爲 3．

11. $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$， $\overline{AC}=10$， $\overline{AB}=6$，求

(1) $\overline{BC}=$__________，(2) $\triangle ABC$ 的面積爲__________ ．

解答 (1)14;(2)$15\sqrt{3}$

解析 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A=36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=196$ 　$\therefore\overline{BC}=14$

$\cos A=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle A=120^\circ$ ， $\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=15\sqrt{3}$ ．

12. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=8$， $\overline{BC}=8\sqrt{3}$， $\angle A=120^\circ$，求 $\triangle ABC$ 的面積爲__________ ．

解答 $16\sqrt{3}$

解析 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8}{\sin C}$ 　$\Rightarrow\sin C=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow\angle C=30^\circ$ 或 150°（不合）

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 120° - 30° = 30°$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B \quad = \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} \times \sin 30° = 16\sqrt{3}$.

13.$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 45°$，$\angle C = 75°$，$b = 2\sqrt{6}$，求 $a =$____________ .

解答 4

解析 $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 45° - 75° = 60°$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{\sin 45°} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin 60°} \qquad \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 .$$

14.已知$\triangle ABC$ 中，$\sin A : \sin B : \sin C = 4:3:2$，若 $\overline{BC} = 8$，試求下列各值:

(1) $\triangle ABC$ 面積 =____________ .

(2) $\sin A =$____________ .

(3) $\overline{BC}$ 邊上的中線長 =____________ .

解答 (1) $3\sqrt{15}$;(2) $\frac{\sqrt{15}}{4}$;(3) $\sqrt{10}$

解析

$\because \sin A : \sin B : \sin C = 4:3:2 \therefore a:b:c = 4:3:2$，又 $a = 8 \Rightarrow b = 6$，$c = 4$

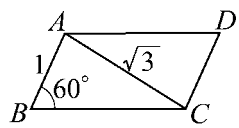
(1)海龍公式 $\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9 \times 1 \times 3 \times 5} = 3\sqrt{15}$.

(2) $\cos A = \frac{6^2 + 4^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 4} = -\frac{12}{2 \times 6 \times 4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \quad \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

(3)設中線爲 x，由中線定理 $6^2 + 4^2 = 2x^2 + \frac{1}{2} \cdot 8^2 \Rightarrow x^2 = 10 \qquad \therefore x = \sqrt{10}$.

15.平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} = 1$，對角線 $\overline{AC} = \sqrt{3}$，$\angle B = 60°$，則另一對角線 $\overline{BD}$ 長爲____________ .

解答 $\sqrt{7}$



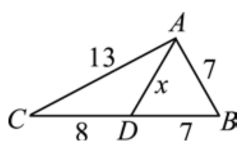
解析 $\triangle ABC$ 中，$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{1}{\sin \angle ACB} \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle ACB = 30° \Rightarrow \angle BAC = 90°$ ，$\overline{BC} = 2$

平行四邊形定理 $2(1^2 + 2^2) = (\sqrt{3})^2 + \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{7}$.

16.在三角形 ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB} = 7, \overline{AC} = 13, \overline{BD} = 7, \overline{CD} = 8$，則 $\overline{AD} =$____________ .

解答 7

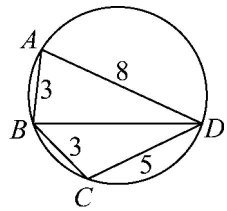


解析 ΔABC 中 $\cos B = \frac{7^2 + 15^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 15}$,

ΔABD 中 $\cos B = \frac{7^2 + 7^2 - x^2}{2 \times 7 \times 7}$

$\Rightarrow \dfrac{49+225-169}{2\times 7\times 15}=\dfrac{49+49-x^2}{2\times 7\times 7}\Rightarrow \dfrac{105}{15}=\dfrac{98-x^2}{7}\Rightarrow x^2=49\Rightarrow x=\pm 7$　（負不合）.

17.已知圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=\overline{BC}=3$， $\overline{CD}=5$， $\overline{DA}=8$，求 $\angle BCD=$____________度．



解答　$120°$

解析　由圖

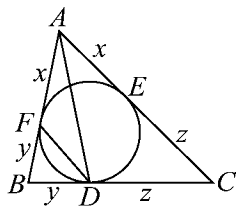
$\Rightarrow \overline{BD}^2=3^2+8^2-2\times 3\times 8\times \cos A=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times \cos C$

$\because \angle A+\angle C=180° \Rightarrow \cos A=-\cos C$

$\therefore 3^2+8^2+2\times 3\times 8\cos C=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times \cos C$

$\Rightarrow 64+48\cos C=25-30\cos C$ ，$\therefore 78\cos C=-39 \Rightarrow \cos C=-\dfrac{1}{2}$　　$\therefore \angle C=120°$ ．

18.設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$， $\overline{BC}=6$， $\overline{CA}=7$，其內切圓切三邊 $\overline{BC}$， $\overline{CA}$， $\overline{AB}$ 於三點 D， E， F，則 (1) $\triangle ADF$ 的面積爲____________，又(2) $\overline{AD}$ 線段長爲____________．



解答　(1) $\dfrac{6\sqrt{6}}{5}$;(2) 5

解析　(1)設 $\overline{AE}=\overline{AF}=x$， $\overline{BD}=\overline{BF}=y$， $\overline{CE}=\overline{CD}=z$

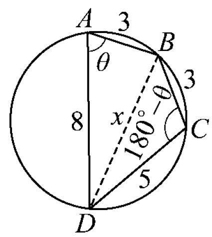
$$\therefore \begin{cases}\overline{AB}=x+y=5\\ \overline{BC}=y+z=6\\ \overline{CA}=x+z=7\end{cases} \Rightarrow x+y+z=9 \quad \therefore x=3，\ y=2，\ z=4$$

$s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$，海龍公式 $\triangle ABC=\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=6\sqrt{6}$

$\therefore \triangle ADF=\dfrac{3}{5}\triangle ABD=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{3}\triangle ABC\right)=\dfrac{1}{5}\triangle ABC=\dfrac{6\sqrt{6}}{5}$ ． $\Leftarrow \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FD}}=\dfrac{3}{2},\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{2}{4}$

(2) $\cos B=\dfrac{5^2+2^2-\overline{AD}^2}{2\cdot 5\cdot 2}=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}$　　$\therefore \dfrac{29-\overline{AD}^2}{2}=\dfrac{12}{6}$ ，　$\therefore \overline{AD}=5$ ．

19.已知：圓內接四邊形 $ABCD$， $\overline{AB}=\overline{BC}=3$， $\overline{CD}=5$， $\overline{DA}=8$，則 (1) $\overline{BD}=$____________，　(2) $ABCD$ 面積=____________．



解答　(1) 7;(2) $\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$

解析　(1)令 $\overline{BD}=x$，則 $\cos\theta=\dfrac{3^2+8^2-x^2}{2\cdot 3\cdot 8}$

$$\cos(180°-\theta)=\dfrac{3^2+5^2-x^2}{2\cdot 3\cdot 5}$$

$\because \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \dfrac{34-x^2}{2\cdot 3\cdot 5}=-\dfrac{73-x^2}{2\cdot 3\cdot 8}\Rightarrow \dfrac{34-x^2}{5}=-\dfrac{73-x^2}{8}\Rightarrow -5(73-x^2)=8(34-x^2)$

$\therefore 13x^2=637 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=7$ ，　$\therefore \overline{BD}=7$ ．

(2) $ABCD$ 面積 $=\triangle ABD+\triangle BCD$　$=\sqrt{9\cdot 2\cdot 1\cdot 6}+\sqrt{\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{2}}=6\sqrt{3}+\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$ ．

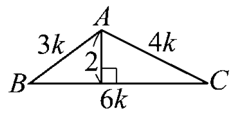
20. $\triangle ABC$ 的三高各為 2，3，4，求 $\triangle ABC$ 的面積＝＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{144}{\sqrt{455}}$

解析 SOL 一

$\because a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=6:4:3$

$\cos B=\dfrac{3^2+6^2-4^2}{2\cdot 3\cdot 6}=\dfrac{29}{36}\Rightarrow \sin B=\dfrac{\sqrt{455}}{36}$



又 $\sin B=\dfrac{2}{3k}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{455}}{36}=\dfrac{2}{3k}\Rightarrow k=\dfrac{24}{\sqrt{455}}$

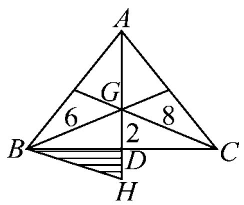
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6k\cdot 2=\dfrac{144}{\sqrt{455}}$（平方單位）．

SOL 二

$H=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$

$\dfrac{1}{\triangle}=\sqrt{H(H-\frac{2}{h_a})(H-\frac{2}{h_b})(H-\frac{2}{h_c})}=\sqrt{\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}}=\dfrac{\sqrt{455}}{144}$，$\triangle=\dfrac{144}{\sqrt{455}}$

21. 已知三角形的三中線長各為 6，9，12，求三角形的面積＝＿＿＿＿＿＿＿＿．



解答 $9\sqrt{15}$

解析 SOL 一

延長 $\overline{AD}$ 使 $\overline{DH}=\overline{GD}$，則 $\triangle BHD\cong\triangle CGD$

$\overline{GH}=\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}=4,\overline{BG}=\frac{2}{3}\times 9=6,\overline{BH}=\overline{CG}=\frac{2}{3}\times 12=8$

$\therefore \triangle GBC=\triangle GBH=\sqrt{9\cdot 1\cdot 3\cdot 5}=3\sqrt{15}$

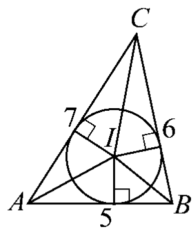
$\triangle ABC=3\triangle GBC=9\sqrt{15}$．

SOL 二

$\triangle ABC=\frac{4}{3}\triangle_{\text{三中線}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{27}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}}=9\sqrt{15}$

22. 設 $\triangle ABC$ 中的三邊長 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，I 為內心，則 $\triangle IAB$ 的面積為＿＿＿＿＿＿＿＿．

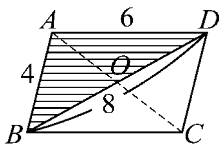
解答 $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$



解析 $\because \triangle ABI:\triangle BCI:\triangle ACI=5:6:7$

$\therefore \triangle ABI=\frac{5}{18}\triangle ABC=\frac{5}{18}\times\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$．

23. ▱ $ABCD$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=6$，$\overline{BD}=8$，求 $\overline{AC}$＝＿＿＿＿＿＿＿＿．



解答 $2\sqrt{10}$

解析 利用平行四邊形定理 $4^2+6^2+4^2+6^2=\overline{AC}^2+8^2$ $\therefore \overline{AC}=2\sqrt{10}$

24. $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 4，6，8，求

(1) $\triangle ABC$ 的面積＝____________．

(2)邊長 6 所對應的高爲____________．

(3) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑爲____________．

(4) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑爲____________．

解答 (1) $3\sqrt{15}$;(2) $\sqrt{15}$;(3) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$;(4) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

解析 $s=\frac{1}{2}(4+6+8)=9$

(1) $\triangle=\sqrt{9\cdot 5\cdot 3\cdot 1}=3\sqrt{15}$

(2) $\triangle=\frac{1}{2}\times 6\times h=3\sqrt{15}\Rightarrow h=\sqrt{15}$

(3) $R=\frac{abc}{4\triangle}=\frac{4\cdot 6\cdot 8}{12\sqrt{15}}=\frac{16\sqrt{15}}{15}$

(4) $\triangle=sr\Rightarrow r=\frac{\triangle}{s}=\frac{3\sqrt{15}}{9}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

25. $\triangle ABC$ 中， $a=4$ ， $b=\sqrt{5}+1$ ， $c=\sqrt{5}-1$ ，求下列各式的值

(1) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=$____________．

(2) $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=$____________．

解答 (1) $4+2\sqrt{5}$;(2) 48

解析 投影定理

(1)原式 $=(b\cos A+a\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+(c\cos B+b\cos C)=c+b+a=4+2\sqrt{5}$.

(2)原式 $=ab^2\cos A+ac^2\cos A+bc^2\cos B+ba^2\cos B+ca^2\cos C+cb^2\cos C$

$=[ab^2\cos A+ba^2\cos B]+[bc^2\cos B+cb^2\cos C]+[ac^2\cos A+ca^2\cos C]$

$=ab[b\cos A+a\cos B]+bc[c\cos B+b\cos C]+ac[c\cos A+a\cos C]$

$=abc+bca+acb=3abc=48$.