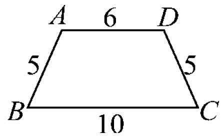
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：99.05.14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-4 廣義角三角函數</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

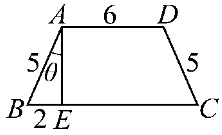
一、填充題　(每題 10 分)



1.如下圖，$ABCD$ 為一等腰梯形，求 $\cos\angle BAD =$____________ .

解答　$-\dfrac{2}{5}$

解析



如右圖，$\overline{BE}=2$，$\cos\angle BAD=\cos\left(90^\circ+\theta\right)=-\sin\theta=-\dfrac{2}{5}$.

2.已知 $\sin 18^\circ 10' = 0.3118$，$\sin 18^\circ 20' = 0.3145$，求 $\sin 161^\circ 42' =$____________ .（計算至小數點第五位）

解答　0.31396

解析　$\sin 161^\circ 42' = \sin\left(180^\circ - 18^\circ 18'\right) = \sin 18^\circ 18'$，內插法

$\sin 18^\circ 10' = 0.3118$
$\sin 18^\circ 18' = y$
$\sin 18^\circ 20' = 0.3145$
$\Rightarrow \dfrac{18^\circ 18' - 18^\circ 10'}{18^\circ 20' - 18^\circ 10'} = \dfrac{y-0.3118}{0.3145-0.3118} \Rightarrow y = 0.31396$.

3.設點 $P\left(\sin\theta\cos\theta, \tan\theta\sec\theta\right)$ 位在第三象限內，若 $\tan\theta$ 為方程式 $6x^2-x-1=0$ 的一根，

則 $2\sin^2\theta+3\cos\theta\cdot\sin\theta-\cos^2\theta=$____________ .

解答　$-\dfrac{8}{5}$

解析　點 $P\left(\sin\theta\cos\theta, \tan\theta\sec\theta\right)$ 位在第三象限

$\sin\theta\cdot\cos\theta<0 \Rightarrow \sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 異號，θ 為第二、四象限角

$\tan\theta\cdot\sec\theta<0 \Rightarrow \tan\theta$ 與 $\cos\theta$ 異號，θ 為第三、四象限角

$\therefore \theta$ 為第四象限角

$6x^2-x-1=0 \Rightarrow (3x+1)(2x-1)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{1}{2}$，即表 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{1}{2}$（不合）

故 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

原式 $=2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2+3\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)-\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2=-\dfrac{8}{5}$.

4.求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{179}\cos^2 k^\circ$ 的值為____________ .

解答　89

解析　$\displaystyle\sum_{k=1}^{179}\cos^2 k^\circ=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 91^\circ+\cdots+\cos^2 179^\circ$

$\because \cos^2 91^\circ = \cos^2(90^\circ + 1^\circ) = \sin^2 1^\circ$ ；$\therefore \cos^2 91^\circ + \cos^2 1^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$

同理 $\cos^2 92^\circ + \cos^2 2^\circ = 1$

$\vdots$

$\cos^2 89^\circ + \cos^2 179^\circ = 1$

$\therefore$ 原式 $= 89$.

5.求 $\sec 540^\circ \cdot \csc(-1890^\circ) + \sin 1590^\circ \cdot \cos(-1860^\circ) + \tan 1395^\circ \cdot \cot(-960^\circ) =$ ____________ .

解答 $\dfrac{15 + 4\sqrt{3}}{12}$

解析 $\sec 540^\circ = \sec(90^\circ \times 6) = \sec 180^\circ = -1$

$\csc(-1890^\circ) = -\csc 1890^\circ = -\csc(90^\circ \times 21) = -\csc 90^\circ = -1$

$\sin 1590^\circ = \sin(90^\circ \times 17 + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\cos(-1860^\circ) = \cos 1860^\circ = \cos(90^\circ \times 20 + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\tan 1395^\circ = \tan(90^\circ \times 15 + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

$\cot(-960^\circ) = -\cot 960^\circ = -\cot(90^\circ \times 10 + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

原式 $= (-1)(-1) + \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) + (-1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{15 + 4\sqrt{3}}{12}$.

6. $a \neq 0$，若點 $P(-3a, 4a)$ 在標準位置角 θ 的終邊上，求 $\dfrac{5\sin\theta + 4\cos\theta}{2\sin\theta - 3\cos\theta} =$ ____________ .

解答 $\dfrac{8}{17}$

解析 $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{4a}{3a} = -\dfrac{4}{3}$

分子、分母同除以 $\cos\theta \Rightarrow \dfrac{5\sin\theta + 4\cos\theta}{2\sin\theta - 3\cos\theta} = \dfrac{5\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + 4}{2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - 3} = \dfrac{5\tan\theta + 4}{2\tan\theta - 3} = \dfrac{-\dfrac{20}{3} + 4}{-\dfrac{8}{3} - 3} = \dfrac{8}{17}$.

7.有向角 -1370° 的同界角中，最小正同界角為 m°，最大負同界角為 n°，則數對 $(m, n) =$ ____________ .

解答 $(70^\circ, -290^\circ)$

解析 $m^\circ = -1370^\circ + 360^\circ \times 4 = 70^\circ$

$n^\circ = -1370^\circ + 360^\circ \times 3 = -290^\circ$

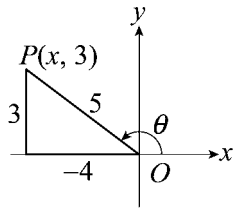
$(m,n)=(70,-290)$.

8.坐標平面上，O 爲原點，θ 爲第二象限角，$P(x,3)$ 是 θ 終邊上一點，已知 $\overline{OP}=5$，求 $x+\cos\theta+3\sin\theta=$

____________ .

解答 -3

解析 θ 爲第二象限角，$P(x,3)$ 在終邊上，又 $\overline{OP}=5=r$ ，



所以 $x=-4$ ， $\cos\theta=-\frac{4}{5}$， $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\therefore x+\cos\theta+3\sin\theta=-4-\frac{4}{5}+3\cdot\frac{3}{5}=-3$.

9.$\dfrac{\sin(270^\circ-\theta)\cdot\csc^2(450^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}+\dfrac{\sec(270^\circ-\theta)\cdot\cot^2(270^\circ+\theta)}{\csc(540^\circ+\theta)}=$ ____________ .

解答 -1

解析 原式$=\dfrac{(-\cos\theta)\cdot\sec^2\theta}{\cos\theta}+\dfrac{(-\csc\theta)\cdot(-\tan\theta)^2}{-\csc\theta}=-\sec^2\theta+\tan^2\theta=-1$.

10.設 $a=\tan130^\circ$，$b=\sin72^\circ$，$c=\cos1040^\circ$，$d=\csc105^\circ$，則 a，b，c，d 的大小順序爲____________ .

解答 $d>b>c>a$

解析 $a=\tan130^\circ=\tan(180^\circ-50^\circ)=-\tan50^\circ<-1$

$b=\sin72^\circ$

$c=\cos1040^\circ=\cos(90^\circ\times11+50^\circ)=\sin50^\circ$

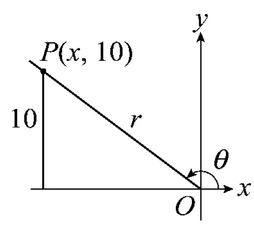
$d=\csc105^\circ=\csc(90^\circ+15^\circ)=\sec15^\circ>1$

$\therefore d>b>c>a$.

11.設 $P(x,10)$ 是角 θ 終邊上的一點，已知 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$，則數對 $(x,\sin\theta)=$ ____________ .

解答 $\left(-\frac{40}{3},\frac{3}{5}\right)$

解析 $P(x,10)$ 爲終邊上的點，且 $\tan\theta<0$ $\therefore\theta$ 爲第二象限角



$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{3}{4}=\frac{10}{x}\Rightarrow x=-\frac{40}{3}$ ， $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2+10^2}=\frac{50}{3}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{10}{\frac{50}{3}}=\frac{3}{5}$ ， $\therefore(x,\sin\theta)=\left(-\frac{40}{3},\frac{3}{5}\right)$.

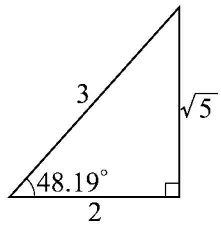
12.已知角 θ 的頂點爲原點，始邊落在 x 軸正向上，終邊通過點 $P(a,b)$，且已知 $\sin\theta=-\frac{3}{4}$，求 $\frac{a}{b}=$ _____ .

解答 $\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

解析

$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-(-\frac{3}{4})^2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$，所求 $\frac{a}{b}=\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=(\pm\frac{\sqrt{7}}{4})\times(-\frac{4}{3})=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$.

13.已知 $\sin 48.19^{\circ}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\cos 228.19^{\circ}=$____________ .

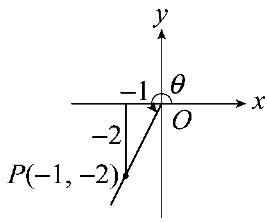


解答 $-\frac{2}{3}$

解析 $\cos 228.19^{\circ}=\cos\left(90^{\circ}\times 2+48.19^{\circ}\right)=-\cos 48.19^{\circ}=-\frac{2}{3}$.

14.已知 $\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，$180^{\circ}<\theta<270^{\circ}$，$\cos\left(270^{\circ}-\theta\right)=m$，$\tan\left(-\theta\right)=n$，求數對 $\left(m,n\right)=$____________ .

解答 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-2\right)$



解析 $m=\cos\left(270^{\circ}-\theta\right)=-\sin\theta=-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$n=\tan\left(-\theta\right)=-\tan\theta=-\left(\frac{-2}{-1}\right)=-2$

$\left(m,n\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-2\right)$.

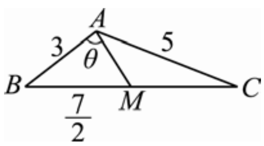
※15.在 $\triangle ABC$ 中，M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3,\overline{AC}=5$，且 $\angle BAC=120^{\circ}$，則 $\tan\angle BAM=$____________ .

（化成最簡根式）

解答 $5\sqrt{3}$

解析 $\triangle ABC$中，$\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\cos 120^{\circ}=49$ $\therefore \overline{BC}=7$

利用中線定理，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\left(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2\right)\Rightarrow 9+25=2\left(\overline{AM}^2+\frac{49}{4}\right)\Rightarrow \overline{AM}=\frac{\sqrt{19}}{2}$



$\triangle ABM$中，$\cos\theta=\frac{3^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2\times 3\times\frac{\sqrt{19}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{19}}$ $\therefore \tan\theta=\frac{5\sqrt{3}}{1}=5\sqrt{3}$.

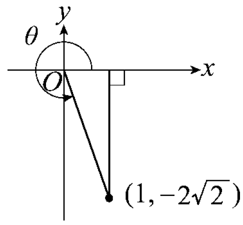
16.設 θ 為一第四象限角，且 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，試求下列各式的值：

(1) $\tan\left(90^{\circ}-\theta\right)+\cot\left(180^{\circ}-\theta\right)+\sin\left(270^{\circ}-\theta\right)=$____________ .

(2) $\cos^2\left(90^{\circ}-\theta\right)+\cos^2\left(180^{\circ}+\theta\right)+\cos^2\left(270^{\circ}-\theta\right)=$____________ .

解答 (1) $-\frac{1}{3}$;(2) $\frac{17}{9}$

解析 (1)原式 $=\cot\theta-\cot\theta-\cos\theta\quad=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$.



(2)原式 $=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\quad=1+\sin^2\theta=1+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$.

17.已知 $\tan 51^{\circ}10'=1.242$， $\tan 51^{\circ}20'=1.250$

(1) $90^{\circ}<\alpha<180^{\circ}$， 且 $\tan\alpha=-1.242$， 試求 α 值=____________ .

(2) $180^{\circ}<\beta<270^{\circ}$， 且 $\cot\beta=1.250$， 試求 β 值=____________ .

解答 (1) $128^{\circ}50'$;(2) $218^{\circ}40'$

解析 (1) 已知 $\tan 51^{\circ}10'=1.242$， 由 $\tan\left(180^{\circ}-\theta\right)=-\tan\theta$ 知

$\tan\left(180^{\circ}-51^{\circ}10'\right)=-1.242$ ， $\therefore\tan\left(128^{\circ}50'\right)=-1.242$ ， $\therefore\alpha=128^{\circ}50'$.

(2) 又 $\cot\left(270^{\circ}-\theta\right)=\tan\theta$

$\therefore\tan 51^{\circ}20'=\cot\left(270^{\circ}-51^{\circ}20'\right)=1.250$， $\therefore\cot\left(218^{\circ}40'\right)=1.250$， $\therefore\beta=218^{\circ}40'$.

18.設角 θ 的終邊上一點 $P\left(\tan 780^{\circ},\sec 1305^{\circ}\right)$， 求 $\csc\theta$ 的值=____________ .

解答 $-\frac{\sqrt{10}}{2}$

解析 $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sec 1305^{\circ}}{\tan 780^{\circ}}=\frac{\sec(90^{\circ}\times 14+45^{\circ})}{\tan(90^{\circ}\times 8+60^{\circ})}=\frac{-\sec 45^{\circ}}{\tan 60^{\circ}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

且 $y<0$， $x>0$ $\therefore\theta$ 爲第四象限角， $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$ ， $\therefore\csc\theta=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

19.設 $5\sin^2\theta-7\cos\theta+1=0$， 且 $\tan\theta<0$， 則 $\sec\theta=$____________ .

解答 $\frac{5}{3}$

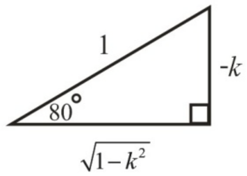
解析 $5\sin^2\theta-7\cos\theta+1=0$ ， $\therefore 5\left(1-\cos^2\theta\right)-7\cos\theta+1=0$

$\therefore 5\cos^2\theta+7\cos\theta-6=0\Rightarrow\left(5\cos\theta-3\right)\left(\cos\theta+2\right)=0$

$\because\cos\theta+2\neq 0$ ， $\therefore 5\cos\theta-3=0$ ， $\therefore\cos\theta=\frac{3}{5}$ ， $\therefore\sec\theta=\frac{5}{3}$.

20.已知$\sin\left(-80^\circ\right)=k$，求$\tan\left(-80^\circ\right)=$(1)____________，$\sec 280^\circ=$(2)____________．（以$k$表示）

解答 $(1)\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$;$(2)\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$



解析 $\sin\left(-80^\circ\right)=k\Rightarrow-\sin 80^\circ=k,\quad \sin 80^\circ=-k$，$\cos 80^\circ=\sqrt{1-k^2}$

$\tan\left(-80^\circ\right)=-\tan 80^\circ=\dfrac{-(-k)}{\sqrt{1-k^2}}=\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

$\sec 280^\circ=\sec\left(360^\circ-80^\circ\right)=\sec 80^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$．

21.$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$，且$\cos\theta\times\cot\theta<0$，則$\dfrac{4\cos\theta+1}{3\sin\theta+5}$的值為____________．

解答 $\dfrac{17}{13}$

解析 $\cos\theta\times\cot\theta<0\Rightarrow\cos\theta,\cot\theta$異號，$\theta$為第三、四象限角

又$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}<0$，$\therefore\theta$為第四象限角

$\therefore\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4\cos\theta+1}{3\sin\theta+5}=\dfrac{4\times\frac{3}{5}+1}{3\times\left(-\frac{4}{5}\right)+5}=\dfrac{17}{13}$．

22.$\cos\theta>0$，$\cot^2\theta\sin\theta<0$，則$\dfrac{\theta}{2}$可能在第____________象限．

解答 二、四

解析 $\cos\theta>0$，$\cot^2\theta\sin\theta<0\Rightarrow\cos\theta>0$，$\sin\theta<0$　$\therefore\theta$為第四象限角

$360^\circ\cdot n+270^\circ<\theta<360^\circ\cdot n+360^\circ$，$n$為整數

$\therefore 360^\circ\cdot\dfrac{n}{2}+135^\circ<\dfrac{\theta}{2}<360^\circ\cdot\dfrac{n}{2}+180^\circ$

① $n=2k$，k為整數代入，$360^\circ\times k+135^\circ<\dfrac{\theta}{2}<360^\circ\times k+180^\circ$，$\dfrac{\theta}{2}$為第二象限角

② $n=2k+1$，k為整數代入，得$360^\circ\times k+315^\circ<\dfrac{\theta}{2}<360^\circ\times k+360^\circ$，$\dfrac{\theta}{2}$為第四象限角

$\therefore\dfrac{\theta}{2}$可能為二、四象限角．

23.若$0^\circ\le\theta\le180^\circ$，且$\sin 2004^\circ=\cos\theta$，求$\theta=$____________．

解答 114°

解析 $\sin 2004^\circ=\sin\left(90^\circ\times 21+114^\circ\right)=\cos 114^\circ$　$\therefore\theta=114^\circ$．