高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.05.04					
範圍	2-2 三角函數關係	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. $\sin^2 32°+\cos^2 32°+\tan^2 20°-\cot^2 72°+\csc^2 72°-\sec^2 20°=$ ____________ .

解答 1

解析 原式$=\left(\sin^2 32°+\cos^2 32°\right)+\left(\tan^2 20°-\sec^2 20°\right)+\left(\csc^2 72°-\cot^2 72°\right)\quad=1+(-1)+1=1$.

2. 已知$\angle A$，$\angle B$均為銳角，若$\sin 62°=\cos A$，且$\tan(A+14°)=\cot B$，求$\angle A+2\angle B=$ ____________ .

解答 124°

解析 $\sin 62°=\cos A\Rightarrow 62°+\angle A=90°\Rightarrow \angle A=28°$

$\tan(A+14°)=\cot B\Rightarrow A+14°+B=90°\Rightarrow \angle B=48°$

$\therefore \angle A+2\angle B=28°+96°=124°$.

3. 求$(\cot x+\tan x)^2-(\tan x-\cot x)^2=$ ____________ .

解答 4

解析 原式$=\cot^2 x+\tan^2 x+2\cot x\cdot\tan x-\left(\tan^2 x+\cot^2 x-2\tan x\cdot\cot x\right)\quad=2+2=4$.

4. 設x為正銳角，求$\log(\sec x+\tan x)+\log(\sec x-\tan x)=$ ____________ .

解答 0

解析 $\log(\sec x+\tan x)+\log(\sec x-\tan x)=\log\left(\sec^2 x-\tan^2 x\right)=\log 1=0$.

5. 設$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求(1)$\sec\theta+\csc\theta=$ ____________ . (2)$\tan\theta+\cot\theta=$ ________________

解答 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 2

解析 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\overset{\text{平方}}{\Rightarrow}\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta=2$

$1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}$

(1) $\sec\theta+\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta}=2$

6. 試求$\tan^4 11°+2\csc^2 79°-\csc^4 79°=$ ____________ .

解答 1

解析 原式$=\cot^4 79°+2\csc^2 79°-\csc^4 79°\quad=\left(\cot^4 79°-\csc^4 79°\right)+2\csc^2 79°$

$$=\left(\cot^2 79^\circ-\csc^2 79^\circ\right)\left(\cot^2 79^\circ+\csc^2 79^\circ\right)+2\csc^2 79^\circ$$

$$=(-1)\left(\cot^2 79^\circ+\csc^2 79^\circ\right)+2\csc^2 79^\circ \quad =\csc^2 79^\circ-\cot^2 79^\circ=1\ .$$

7. 設 $\sqrt{3}$ 為 $x^2-\left(\tan\theta+\cot\theta\right)x+1=0$ 的一根，求 $\sin\theta\cdot\cos\theta=$____________ .

解答 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解析 設另一根為 k ,利用根與係數關係

$\sqrt{3}\cdot k=1\cdots(1)$

$\sqrt{3}+k=\tan\theta+\cot\theta\cdots(2)$

由(1) $k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 代入(2) $\Rightarrow\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\quad\Rightarrow\sin\cdot\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

8. 設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，若 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{25}{12}$，求

(1) $\sin\theta+\cos\theta=$____________, (2) $\sin\theta-\cos\theta=$____________ .

解答 (1) $\dfrac{7}{5}$;(2) $\pm\dfrac{1}{5}$

解析 (1) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{25}{12}\quad\Rightarrow\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{12}{25}\quad\Rightarrow2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{24}{25}$

$\Rightarrow1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{49}{25}\quad\Rightarrow\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2=\dfrac{49}{25}\quad\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta=\pm\dfrac{7}{5}$（取正）

(2) $\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2=1-2\sin\theta\cdot\cos\theta\quad=1-2\cdot\dfrac{12}{25}=\dfrac{1}{25}\quad\therefore\sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{1}{5}$.

9.設 $\sin^2\theta+\sin\theta=1$，求 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=$____________ .

解答 1

解析 $\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ ，$\therefore$ 所求 $=\cos^2\theta+\left(\cos^2\theta\right)^2=\sin\theta+\sin^2\theta=1$.

10.已知 $\cos\theta=\tan\theta$，求 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=$____________ .

解答 $1+\sqrt{5}$

解析 $\cos\theta=\tan\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\cos^2\theta=\sin\theta$

$\Rightarrow1-\sin^2\theta=\sin\theta\quad\Rightarrow\sin^2\theta+\sin\theta-1=0\quad\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（取正）

$$\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\quad=\frac{2}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{-1+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\sqrt{5}+1\ .$$

11.已知 $2\sin^2\theta-3\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=0$，求 $\tan\theta=$____________ .

解答 1 或 $\frac{1}{2}$

解析 各項同除以 $\cos^2\theta$,得 $\Rightarrow 2(\frac{\sin\theta}{\cos\theta})^2\theta-3(\frac{\sin\theta}{\cos\theta})+1=0\Rightarrow 2\tan^2\theta-3\tan\theta+1=0$

$\Rightarrow(\tan\theta-1)(2\tan\theta-1)=0,\therefore\tan\theta=1$ 或 $\tan\theta=\frac{1}{2}$.

12.設 θ 為銳角，求 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1+\tan\theta}+\frac{1}{1+\cot\theta}+\frac{1}{1+\sec\theta}+\frac{1}{1+\csc\theta}=$____________ .

解答 3

解析 $\because\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1+\csc\theta}=\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\theta}}=\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}=1$，

同理 $\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1+\sec\theta}=1$， $\frac{1}{1+\tan\theta}+\frac{1}{1+\cot\theta}=1$，$\therefore$ 原式 $=3$.

13.已知 $\tan x=\frac{1}{3}$，求 $\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}=$____________ .

解答 $\frac{9}{11}$

解析 分子分母同除以 $\cos\theta\Rightarrow\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\frac{3\times\frac{\sin x}{\cos x}+2}{2\times\frac{\sin x}{\cos x}+3}=\frac{3\tan x+2}{2\tan x+3}=\frac{3\times\frac{1}{3}+2}{2\times\frac{1}{3}+3}=\frac{9}{11}$.

14.已知 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3$，求 $\tan\theta=$____________ .

解答 2

解析 分子分母同除以 $\cos\theta\Rightarrow\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=3$

$\tan\theta+1=3\tan\theta-3\Rightarrow 2\tan\theta=4$ ，$\therefore\tan\theta=2$.

15.求 $\cot1^\circ\times\cot2^\circ\times\cot3^\circ\times\cdots\times\cot88^\circ\times\cot89^\circ=$____________ .

解答 1

解析 原式 $=(\cot1^\circ\times\cot89^\circ)\times(\cot2^\circ\times\cot88^\circ)\times\cdots\times(\cot44^\circ\times\cot46^\circ)\times\cot45^\circ$

$=(\cot1^\circ\times\tan1^\circ)\times(\cot2^\circ\times\tan2^\circ)\times\cdots\times(\cot44^\circ\times\tan44^\circ)\times\cot45^\circ=1$.

16.設 $\cos\theta+3\sin\theta=2$，且 $0^\circ<\theta<90^\circ$，求 $\cos\theta+\sin\theta=$____________ .

解答 $\frac{4+\sqrt{6}}{5}$

解析 $\cos\theta+3\sin\theta=2\Rightarrow\cos\theta=2-3\sin\theta$ 代入 $\Rightarrow\sin\theta^2+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow\sin^2\theta+(4-12\cos\theta+9\sin^2\theta)=1\Rightarrow10\sin^2\theta-12\sin\theta+3=0$

$\Rightarrow\sin\theta=\frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$

$\cos\theta=2-3\sin\theta=2-3\times\frac{6\pm\sqrt{6}}{10}=\frac{2\mp3\sqrt{6}}{10}$ (負不合)，$\Rightarrow\sin\theta=\frac{6-\sqrt{6}}{10}$

故 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4+\sqrt{6}}{5}$.

17.求 $\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50°+\cos^2 60°+\cos^2 70°+\cos^2 80°=$ ____________ .

解答 4

解析 原式 $=\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\sin^2 40°+\sin^2 30°+\sin^2 20°+\sin^2 10°$

$=\left(\cos^2 10°+\sin^2 10°\right)+\left(\cos^2 20°+\sin^2 20°\right)+\left(\cos^2 30°+\sin^2 30°\right)+\left(\cos^2 40°+\sin^2 40°\right)$

$=4$.

18.設 θ 為銳角， $0°<5\theta<90°$，若 $\tan5\theta=\cot4\theta$，求 $\sin3\theta+\cos6\theta=$ ____________ .

解答 1

解析 $\because\tan5\theta=\cot4\theta\Rightarrow 5\theta+4\theta=90°\Rightarrow\theta=10°$.

$\sin3\theta+\cos6\theta=\sin30°+\cos60°=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

19.試化簡 $\left(1-\tan^4\theta\right)\cos^2\theta+\tan^2\theta=$ ____________ .（θ 為銳角）

解答 1

解析 原式 $=\left(1+\tan^2\theta\right)\left(1-\tan^2\theta\right)\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=\left(\sec^2\theta\right)\left(1-\tan^2\theta\right)\cdot\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=(\sec^2\theta\cdot\cos^2\theta)(1-\tan^2\theta)+\tan^2\theta=1-\tan^2\theta+\tan^2\theta=1$.

20.θ 是銳角，已知 $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{5}$，求(1) $\tan\theta=$ ____________，(2) $\sec\theta=$ ____________ .

解答 (1)$\frac{12}{5}$;(2)$\frac{13}{5}$

解析 $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{5}$ ……①，

$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1\Rightarrow(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=1$

$\sec\theta+\tan\theta=5$ ……..②

由①②$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{12}{5}\quad \Rightarrow \sec\theta=\dfrac{13}{5}$.

21.設$\sin^3 x+\cos^3 x=1$，求下列各式的值:

(1)$\sin x+\cos x=$____________，(2)$\sin^4 x+\cos^4 x=$____________ .

解答 (1)1;(2)1

解析 令$\sin x+\cos x=t\Rightarrow \sin x\cdot\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cdot\cos x(\sin x+\cos x)\Leftarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow 1=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t\Rightarrow t^3-3t+2=0\Rightarrow (t-1)^2(t+2)=0\Rightarrow t=1,\ -2\text{（不合）}$$

$\therefore \sin x+\cos x=1\Rightarrow \sin x\cdot\cos x=0$

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x\quad =1-0=1 .$$

22.設$0<\theta<45^\circ$，求$\sin^2(45^\circ+\theta)+\sin^2(45^\circ-\theta)=$____________ .

解答 1

解析 $\sin^2(45^\circ+\theta)+\sin^2(45^\circ-\theta)$

$$=\sin^2(45^\circ+\theta)+\cos^2\left[90^\circ-(45^\circ-\theta)\right]=\sin^2(45^\circ+\theta)+\cos^2(45^\circ+\theta)=1 .$$

23.求$\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ+\sec^2 21^\circ-\dfrac{1}{\tan^2 69^\circ}=$____________ .

解答 2

解析 原式$=\sin^2 35^\circ+\cos^2 35^\circ+\sec^2 21^\circ-\cot^2 69^\circ\quad =1+\sec^2 21^\circ-\tan^2 21^\circ\quad =1+1=2$.

24.θ為銳角，且$2\sin\theta\cdot\cos\theta=1$，求$\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta+\sec\theta+\csc\theta=$____________ .

解答 $2+3\sqrt{2}$

解析 $2\sin\theta\cdot\cos\theta=1\quad\Rightarrow (\sin\theta+\cos\theta)^2$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=1+1=2\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$$

$$\text{原式}=\sin\theta+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=2+3\sqrt{2} .$$