

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.04.03				
範圍	第 6 回	班級		姓名
	1-4 對數函數(II)	座號		姓名

一、計算題 (每題 25 分)

1、試求下列方程式之實根個數：

(1) $2^{-|x|} + x = 2$ 。 (2) $|\log x| + x^2 = 4$ 。 (3) $\log_2 |x| + x + 1 = 0$

答案： (1) 1 (2) 2 (3) 3

解析：

(1) $2^{-|x|} + x = 2 \Rightarrow 2^{-|x|} = -x + 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2^{-|x|} \\ y = -x + 2 \end{cases}$ 二圖形交點數 1，

(2) $|\log x| + x^2 = 4 \Rightarrow |\log x| = -x^2 + 4 \Rightarrow \begin{cases} y = |\log x| \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}$ 二圖形交點數 2，

(3) $\log_2 |x| + x + 1 = 0 \Rightarrow \log_2 |x| = -x - 1 \Rightarrow \begin{cases} y = \log_2 |x| \\ y = -x - 1 \end{cases}$ 二圖形交點數 3，

2、設 $2x = \log_3 7$ ，試求 $\frac{3^{3x} - 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}}$ 。

答案： $\frac{171}{28}$

解析：

$2x = \log_3 7 \Rightarrow 7 = 3^{2x}$

$$\frac{3^{3x} - 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{3^{4x} - 3^{-2x}}{3^{2x} + 3^0} = \frac{7^2 - \frac{1}{7}}{7 + 1} = \frac{171}{28}$$

3、設 $0 < a < 1$ ，試解對數不等式： $x^{\log_a x} < a^3 x^2$

答案： $x > \frac{1}{a}$ 或 $0 < x < a^3$

解析：

取 $\log_a \Rightarrow x^{\log_a x} < a^3 x^2$ ，因為 $0 < a < 1 \Leftrightarrow \log_a x^{\log_a x} > \log_a a^3 x^2$

$$\log_a x \cdot \log_a x > \log_a a^3 + 2 \log_a x$$

設 $t = \log_a x \Rightarrow t^2 > 3 + 2t$

$$(t-3)(t+1) > 0 \Rightarrow t < -1, \quad t > 3$$

$$\Rightarrow \log_a x < -1, \quad \log_a x > 3$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{a}, \quad x < a^3$$

又真數 $x > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{a}, \quad 0 < x < a^3$

4、試解對數不等式： $\log_x(x^2 - 6) < \log_x x$

答案： $\sqrt{6} < x < 3$

解析：

(1) 當 $x > 1$ ①

$$\log_x(x^2 - 6) < \log_x x \Rightarrow (x^2 - 6) < x$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3 \dots\dots②$$

$$\text{又真數 } x^2 - 6 > 0 \Rightarrow (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) > 0 \Rightarrow x > \sqrt{6}, x < -\sqrt{6} \dots\dots③$$

由①②③ $\sqrt{6} < x < 3$

(2) 當 $0 < x < 1$...④

$$\log_x(x^2 - 6) < \log_x x \Rightarrow (x^2 - 6) > x$$

$$(x - 3)(x + 2) > 0 \Rightarrow x < -2, \quad x > 3 \dots\dots⑤$$

由⑤④ 無解