

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.04.03				
範圍	第 4 回	班級		姓名
	1-3 對數	座號		

一、計算題 (每題 25 分)

1、試求 $(\log_3 5 + \log_9 25)(\log_5 27 + \log_{25} 3)$ 之值。

答案：7

解析：

$$\begin{aligned} & (\log_3 5 + \log_9 25)(\log_5 27 + \log_{25} 3) \\ &= (\log_3 5 + \frac{2}{2} \log_3 5)(3 \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 3) \\ &= (2 \log_3 5)(\frac{7}{2} \log_5 3) = 2 \times \frac{7}{2} \times \log_3 5 \log_5 3 = 7 \end{aligned}$$

2、設 $a = \log_5 3$ ， $b = \log_3 5$ 試求 $5^{4a - \frac{3}{b} + 2}$ 之值。

答案：75

解析：

$$\begin{aligned} a = \log_5 3 &\Rightarrow 5^a = 3 ; b = \log_3 5 \Rightarrow 5 = 3^b , \text{ 即 } 5^{\frac{1}{b}} = 3 \\ 5^{4a - \frac{3}{b} + 2} &= \frac{(5^a)^4 \times 5^2}{(5^{\frac{1}{b}})^3} = \frac{3^4 \times 5^2}{3^3} = 75 \end{aligned}$$

3、設 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_3 5$ ， $c = \log_5 7$ 試以 a, b, c 表示 $\log_{21} 140$ 。

答案： $\frac{2 + ab + abc}{a + abc}$

解析：

$$\begin{aligned} a = \log_2 3 , b = \log_3 5 &\Rightarrow ab = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = \log_2 5 , \\ \text{又 } c = \log_5 7 &\Rightarrow abc = \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 = \log_2 7 \\ \log_{21} 140 &= \frac{\log_2 140}{\log_2 21} = \frac{2 \log_2 2 + \log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + \log_2 7} = \frac{2 + ab + abc}{a + abc} \end{aligned}$$

4、設 $a > 1$ ， $a \neq 1$ ， $b > 0$ ， $b \neq 1$ ，且滿足 $a^x = b^y = \frac{b^2}{a^3} (\neq 1)$ ，試求 $(x+3)(y-2)$ 之值。

答案：-6

解析：

$$\begin{aligned} a^x = \frac{b^2}{a^3} &\Rightarrow a^{x+3} = b^2 , b = a^{\frac{x+3}{2}} \\ b^y = \frac{b^2}{a^3} &\Rightarrow a^3 = \frac{b^2}{b^y} , \text{ 即 } b^{y-2} = a^{-3} \Rightarrow (a^{\frac{x+3}{2}})^{y-2} = a^{-3} \\ \frac{x+3}{2} \times (y-2) &= -3 \Rightarrow (x+3)(y-2) = -6 \end{aligned}$$

5、設方程式 $(\log 5x)(\log 8x) = 1$ 二根為 α, β ，試求 $\alpha\beta$ 之值。

答案： $\frac{1}{40}$

解析：

$$(\log 5x)(\log 8x) = 1 \Rightarrow (\log x + \log 5)(\log x + \log 8) = 1$$

$$\text{設 } t = \log x \Rightarrow t^2 + (\log 5 + \log 8)t + (\log 5 \log 8 - 1) = 0$$

$$= -5\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$$

原式二根為 α, β ，即 $t^2 + (\log 5 + \log 8)t + (\log 5 \log 8 - 1) = 0$ 二根 $\log \alpha, \log \beta$

$$\text{二根和 } \log \alpha + \log \beta = -(\log 5 + \log 8) = -\log 40 = \log 40^{-1}$$

$$\Rightarrow \log \alpha\beta = \log 40^{-1}$$

$$\text{即 } \alpha\beta = \frac{1}{40}$$