高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.03.16					
範圍	1-3 對數	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

( ) 1. $\log_4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)=$ (1)1 (2)$\frac{1}{2}$ (3)$\frac{1}{3}$ (4)$\frac{1}{4}$ (5)$\frac{1}{5}$.

解答 4

解析 原式$=\log_{4^2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

$$=\log_{16}\left(2+\sqrt{3}-2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+2-\sqrt{3}\right)=\log_{16}\left(2-2+2\right)=\log_{2^4}2=\frac{1}{4}\ .$$

( ) 2. $\log_2 64\sqrt{2}=$ (1)$\frac{9}{2}$ (2)$\frac{11}{2}$ (3)$\frac{13}{2}$ (4)$\frac{15}{2}$ (5)7 .

解答 3

解析 $\log_2 2^6\times 2^{\frac{1}{2}}=\log_2 2^{\frac{13}{2}}=\frac{13}{2}\log_2 2=\frac{13}{2}$.

( ) 3. $2x+2\log\left(2+10^{-x}\right)-\log\left(\frac{1}{4}+10^x+10^{2x}\right)=$ (1) 2×10^x (2) $x^{\log\frac{1}{4}}$ (3)1 (4) $2\log 2$

(5) $2x+10^{2x}$.

解答 4

解析 原式$=\log10^{2x}+\log\left(2+10^{-x}\right)^2-\log\left(\frac{1}{4}+10^x+10^{2x}\right)$

$$=\log\frac{\left(10^{2x}\right)\left(4+4\times10^{-x}+10^{-2x}\right)}{\frac{1}{4}+10^x+10^{2x}}=\log\frac{4\times10^{2x}+4\times10^x+1}{\frac{1}{4}\left(4\times10^{2x}+4\times10^x+1\right)}=\log4=2\log2\ .$$

二、多選題 (每題 10 分)

( ) 1. 下列各式何者不真? (1) $\log_2(-5)=-\log_2 5$ (2) $\log_2(6)=(\log_2 2)(\log_2 3)$

(3) $\log_2 6^3=(\log_2 6)^3$ (4) $\log_2(5)=\log_2 2+\log_2 3$ (5) $\frac{\log_2 9}{\log_2 5}=\log_2 9-\log_2 5$.

解答 12345

解析 (1)╳: 真數爲正 .

(2)╳: $\log_2(6)=\log_2 2+\log_2 3$.

(3)╳: $\log_2 6^3=3\log_2 6\neq(\log_2 6)^3$.

(4)╳: $\log_2 2+\log_2 3=\log_2(2\times3)=\log_2 6$.

(5)╳: $\log_2 9-\log_2 5=\log_2\frac{9}{5}$.

( ) 2. 某物理學家在計算繁雜的數值 a，b，c，d，e 時，以某數爲底，將這五個數分別取對數，結果得到 5.5，7.5，13，18.5，26 這五個對數值 . 請選出下列正確的選項：

(1) $c=a+b$. (2) $c=ab$. (3) $d=a^2b$. (4) $e^2=c$.

解答　23

解析　設底數爲α，由題意知$5.5=\log_{\alpha}a$，$7.5=\log_{\alpha}b$，$13=\log_{\alpha}c$，$18.5=\log_{\alpha}d$，$26=\log_{\alpha}e$．

則$\log_{\alpha}c=13=5.5+7.5=\log_{\alpha}a+\log_{\alpha}b=\log_{\alpha}ab$，即$c=ab$．

$\log_{\alpha}d=18.5=5.5+5.5+7.5=2\log_{\alpha}a+\log_{\alpha}b=\log_{\alpha}a^2b$，即$d=a^2b$．

$\log_{\alpha}e=26=2\times13=2\log_{\alpha}c=\log_{\alpha}c^2$，即$e=c^2$．

一、填充題　(每題 10 分)

1. $\log_4(\log_2 9)+3\log_{64}(\log_3 4)=$____________．

解答　1

解析　$\log_4(\log_2 9)+3\log_{4^3}(\log_3 4)=\log_4(\log_2 9)+\dfrac{3}{3}\log_4(\log_3 4)$

$=\log_4(\log_2 9\times\log_3 4)=\log_4[2\log_2 3\times 2\log_3 2]=\log_4[2\times2\log_2 3\times\log_3 2]=\log_4 4=1$．

2. $2^{3+\log_4 36}-3^{\log_9 25}=$____________．

解答　43

解析　原式$=2^3\times2^{\log_2 6}-3^{\log_3 5}=8\times6-5=48-5=43$．

3. $\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)\left(\log_4\dfrac{1}{5}\right)\left(\log_5\dfrac{1}{6}\right)\left(\log_6\dfrac{1}{7}\right)\left(\log_7\dfrac{1}{8}\right)\left(\log_8\dfrac{1}{9}\right)=$____________．

解答　2

解析　原式$=(-\log_3 4)(-\log_4 5)(-\log_5 6)(-\log_6 7)(-\log_7 8)(-\log_8 9)$

$=(-1)^6(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_7 8)(\log_8 9)$

$=\log_3 9=2$．

4. $(\log_3 4+\log_{27}64)(\log_4 5+\log_{16}5)(\log_5 9+\log_{25}81)=$____________．

解答　12

解析　原式$=\left(2\log_3 2+\dfrac{6}{3}\log_3 2\right)\left(\dfrac{1}{2}\log_2 5+\dfrac{1}{4}\log_2 5\right)\left(2\log_5 3+\dfrac{4}{2}\log_5 3\right)$

$=(4\log_3 2)\left(\dfrac{3}{4}\log_2 5\right)(4\log_5 3)=4\times\dfrac{3}{4}\times4\times\log_3 2\cdot\log_2 5\cdot\log_5 3=12$．

5. 求下列各式的值．

(1) $\log_{2\sqrt{2}}\left(32\times\sqrt[5]{4}\right)=$____________(2) $\log\dfrac{7}{36}+2\log3-\log\dfrac{14}{25}+5\log2=$____________．

解答　(1)$\dfrac{18}{5}$;(2)2

解析　(1)$\log_{2\sqrt{2}}\left(32\times\sqrt[5]{4}\right)\quad=\log_{2^{\frac{3}{2}}}\left(2^5\times2^{\frac{2}{5}}\right)\quad=\log_{2^{\frac{3}{2}}}2^{\frac{27}{5}}=\dfrac{\frac{27}{5}}{\frac{3}{2}}\log_2 2=\dfrac{18}{5}$．

(2)原式$=\log\dfrac{7}{36}+\log3^2-\log\dfrac{14}{25}+\log2^5\quad=\log\dfrac{\frac{7}{36}\times9\times32}{\frac{14}{25}}\quad=\log100=2$．

6. 求下式的值．$\log_2\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)=$______．

$\boxed{解答}$ 1

$\boxed{解析}$ 原式$=\log_2\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)=\log_2\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$

$=\log_2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)\right]=\log_2 2=1$．

7. 設$a=\log_2 3$，$b=\log_3 7$，試以a，b表$\log_6 21=$______．

$\boxed{解答}$ $\dfrac{a+ab}{a+1}$

$\boxed{解析}$ $\log_6 21=\dfrac{\log_3 21}{\log_3 6}=\dfrac{\log_3 3+\log_3 7}{\log_3 3+\log_3 2}=\dfrac{1+b}{1+\frac{1}{a}}=\dfrac{a+ab}{a+1}$．

8. 欲使對數$\log_{x-2}\left(x^2+3x-4\right)$有意義，求實數$x$的範圍為______．

$\boxed{解答}$ $x>2$ 且 $x\neq 3$

$\boxed{解析}$ (1)底數：$x-2>0$ 且 $x-2\neq 1\Rightarrow x>2$ 且 $x\neq 3$

(2)真數：$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)>0\Rightarrow x<-4, x>1$

$\therefore$由(1)(2)知　$x>2$ 且 $x\neq 3$．

9. 對於任何實數x，欲使$\log_{10}\left(x^2+4x+a\right)$有意義，則實數$a$的範圍為______．

$\boxed{解答}$ $a>4$

$\boxed{解析}$ $\log_{10}\left(x^2+4x+a\right)$有意義，表示真數恆正，$x^2+4x+a>0$恆成立

即$D=4^2-4a<0\Rightarrow a>4$．

10. 使對數$\log_4\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)\right]$有意義的$x$的範圍為______．

$\boxed{解答}$ $1<x<2$

$\boxed{解析}$ $\log_4\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)\right]$有意義，即真數恆正

$\therefore$真數$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)>0=\log_{\frac{1}{2}}1$　$\Rightarrow$真數$0<\log_2 x<1$

$\Rightarrow \log_2 1<\log_2 x<\log_2 2\Rightarrow 1<x<2$．

11. 求下列各式的值．(1)$3^{\frac{4\log 2}{\log 3}}=$______(2)$2\log 5+4\log 2-\log 4=$______．

$\boxed{解答}$ (1)16;(2)2

$\boxed{解析}$ (1)$3^{\frac{4\log 2}{\log 3}}=3^{\frac{\log 2^4}{\log 3}}=3^{\log_3 16}=16$．(2)原式$=\log 5^2+\log 2^4-\log 4=\log\dfrac{25\times 16}{4}=\log 100=2$．

12. $\log_4 3\times\log_9 25\times\log_5 32=$______．

$\boxed{解答}$ $\dfrac{5}{2}$

解析　原式 $=\frac{\log 3}{\log 4}\times\frac{\log 25}{\log 9}\times\frac{\log 32}{\log 5}=\frac{\log 3}{2\log 2}\times\frac{2\log 5}{2\log 3}\times\frac{5\log 2}{\log 5}=\frac{5}{2}$.

13. $\log_2\left[\log_2\left(\log_3 81\right)\right]=$ ____________ .

解答　1

解析　原式 $=\log_2\left[\log_2\left(\log_3 3^4\right)\right]=\log_2\left[\log_2 4\right]\quad=\log_2\left[\log_2 2^2\right]=\log_2 2=1$.

14. 設 $a=\log_5 2$， $b=\log_3 5$， 求 $5^{a-\frac{1}{b}+2}=$ ____________ .

解答　$\frac{50}{3}$

解析　$a=\log_5 2\Rightarrow 5^a=2$

$b=\log_3 5\Rightarrow 3^b=5\Rightarrow 3=5^{\frac{1}{b}}$

$5^{a-\frac{1}{b}+2}=5^a\times 5^{-\frac{1}{b}}\times 5^2=2\times\frac{1}{3}\times 25=\frac{50}{3}$.

15. $10^{-\log_2 x}\frac{1}{\sqrt{1000}}$， 求 $x=$ ____________ .

解答　$2\sqrt{2}$

解析　$10^{-\log_2 x}=\frac{1}{\sqrt{1000}}$

$10^{-\log_2 x}=10^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow -\log_2 x=-\frac{3}{2}\Rightarrow \log_2 x=\frac{3}{2}\qquad x=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

16. 已知 $\log 6=0.7782$， 求 $10^{0.7782}=$ ____________ .

解答　6

解析　$\log 6=0.7782\Rightarrow 10^{0.7782}=6$.

17. 化簡 $\frac{1}{\log_4 6}+\frac{1}{\log_{27} 6}+\frac{1}{\log_{12} 6}=$ ____________ .

解答　4

解析　原式 $=\log_6 4+\log_6 27+\log_6 12\quad=\log_6\left(4\times 27\times 12\right)$

$=\log_6\left(2^2\times 3^3\times 2^2\times 3^1\right)\quad=\log_6\left(2^4\times 3^4\right)\quad=\log_6 6^4=4$.

18. 設 a， b 爲二自然數，若 $\log_2 a$， $\log_2 b$ 爲方程式 $x^2-3x+k=0$ 的二實根，求 $k=$ ____________ .

解答　0 或 2

解析　利用根與係數關係得

$\log_2 a+\log_2 b=3\Rightarrow \log_2 ab=\log_2 2^3\Rightarrow ab=8$，

a	1	2	4	8
b	8	4	2	1

$\Rightarrow\quad \log_2 a\times\log_2 b=k\Rightarrow k=0$ 或 2。

19. 解 $2\log_2 x-\log_2\left(x+6\right)=3$， 則 $x=$ ____________ .

解答　12

解析　(1)真數恆正： $x>0$ 且 $x+6>0 \Rightarrow x>0$

(2) $\log_2 x^2-\log_2(x+6)=\log_2 2^3 \Rightarrow \log_2\dfrac{x^2}{x+6}=\log_2 8$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{x+6}=8 \Rightarrow x^2-8x-48=0$， $(x-12)(x+4)=0 \Rightarrow x=12$ 或 $x=-4$

由(1)(2)知　$x=12$ ．

20. 方程式 $\log_7(7^x+49)=\dfrac{x}{2}+1+\log_7 2$ 的解 $x=$____________ ．

解答　2

解析　$\log_7(7^x+49)=\log_7 7^{\frac{x}{2}}+\log_7 7+\log_7 2=\log_7 14\times 7^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 7^x+49=14\cdot 7^{\frac{x}{2}}$

設 $t=7^{\frac{x}{2}}$，原式 $\Rightarrow t^2-14t+49=0$

$(t-7)^2=0 \Rightarrow t=7$　　即 $7^{\frac{x}{2}}=7 \Rightarrow \dfrac{x}{2}=1 \Rightarrow x=2$ ．

21. 設 $x=\sqrt{3}+1$，求 $\log_2(x^3-x^2-4x+6)=$____________ ．

解答　3

解析　$\because x=\sqrt{3}+1 \Rightarrow x-1=\sqrt{3} \Rightarrow (x-1)^2=3 \Rightarrow x^2-2x-2=0$ (湊成 0)

又 $x^3-x^2-4x+6=(x^2-2x-2)(x+1)+8\ =0+8=8$ $\Leftarrow$除法原理

$\therefore$原式 $=\log_2 8=\log_2 2^3=3$ ．

22. 設 $(\log 3x)(\log 7x)=1$ 的二根爲 α， β，則 $\alpha\beta=$____________ ．

解答　$\dfrac{1}{21}$

解析　原式 $\Rightarrow (\log 3x)(\log 7x)=1$

$\Rightarrow (\log x+\log 3)(\log x+\log 7)=1$,

$\Rightarrow (\log x)^2+(\log 3+\log 7)\log x+\log 3\times\log 7-1=0$，上式的二根爲 α， β

則當 $t=\log x \Rightarrow t^2+(\log 3+\log 7)t+(\log 3\times\log 7-1)=0$ 之二根爲 $\log\alpha,\log\beta$

由根與係數關係得 $\log\alpha+\log\beta=-(\log 3+\log 7) \Rightarrow \log\alpha\beta=-\log 21 \Rightarrow \alpha\beta=\dfrac{1}{21}$ ．

23. 解 $\log_x 9-\log_3 x=-1$，得 $x=$____________ ．

解答　$x=9$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$

解析　$\log_x 3^2-\log_3 x=-1$

令 $t=\log_x 3$　　原式 $\Rightarrow 2t-\dfrac{1}{t}=-1 \Rightarrow 2t^2+t-1=0$

$\Rightarrow (2t-1)(t+1)=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$或$t=-1$　即$\log_x 3=\dfrac{1}{2}$或$\log_x 3=-1$　$\therefore x=9$或$x=\dfrac{1}{3}$.

24. 設a，b，c均爲正整數，若$a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，求$a+b+c=$____________ .

解答　15

解析　原式$\Rightarrow \log_{520}\left(2^a\times 5^b\times 13^c\right)=\log_{520}520^3$

$\therefore 2^a\times 5^b\times 13^c=\left(2^3\times 5\times 13\right)^3=2^9\times 5^3\times 13^3$

$\therefore a=9$，$b=3$，$c=3$，$a+b+c=15$.

25. 已知$\log 18=a$，$\log 21=b$，$\log 28=c$，試以a，b，c表$\log 84=$____________ .

解答　$\dfrac{2a+b+4c}{5}$

解析　$a=\log 2+2\log 3\cdots(1)$

$b=\log 3+\log 7\cdots(2)$

$c=2\log 2+\log 7\cdots(3)$

$(3)-(2):2\log 2-\log 3=c-b\cdots(4)$

$(4)\times 2+(1):5\log 2=2c-2b+a\Rightarrow$　$\therefore \log 2=\dfrac{2c-2b+a}{5}$

$\log 84=\log 4+\log 21=2\log 2+\log 21=\dfrac{4c-4b+2a}{5}+b=\dfrac{2a+b+4c}{5}$.

26. 解$2^{x+1}+2^{x+2}=5^{x+1}+5^{x+2}$，得$x=$____________ .

解答　$\log_{\frac{2}{5}}5$

解析　原式$\Rightarrow 2\times 2^x+2^2\times 2^x=5\times 5^x+5^2\times 5^x$　$\Rightarrow 6\times 2^x=30\times 5^x$　$\Rightarrow \dfrac{2^x}{5^x}=\dfrac{30}{6}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x=5\Rightarrow x=\log_{\frac{2}{5}}5$.