

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.04.03				
範圍	第 2 回	班級		姓名
	指數函數(I)	座號		

一、計算題 (每題 25 分)

1、設 $\sqrt[x]{125} = \sqrt[y]{5^{2y-5}}$ ， $9^{10x+2y} = 729^{xy}$ ，試求數對 (x, y) 之值。

答案：(4, 4)

解析：

$$\begin{aligned} \sqrt[x]{125} = \sqrt[y]{5^{2y-5}} &\Rightarrow 5^{\frac{3}{x}} = 5^{\frac{2y-5}{y}}, \\ 9^{10x+2y} = 729^{xy} &\Rightarrow 3^{2(10x+2y)} = 3^{6xy} \\ \begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{2y-5}{y} \\ 2(10x+2y) = 6xy \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} + \frac{20}{y} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

2、(1) 設 $0 < a < b$ ，化簡 $(a - 2\sqrt{ab} + b)^{\frac{1}{2}} = ?$

(2) 設 α, β 為 $2^{-x} - 2^{\frac{3-x}{2}} + 16 = 0$ 之二根，試求 $\alpha + \beta$ 之值。

答案：(1) $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ (2) -8

解析：

$$(1) (a - 2\sqrt{ab} + b)^{\frac{1}{2}} = [(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2]^{\frac{1}{2}} = [(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2]^{\frac{1}{2}} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 設 } t = 2^{\frac{x}{2}} &\Rightarrow (2^{\frac{x}{2}})^2 - 2^3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 16 = 0 \\ t^2 - 8t + 16 = 0 &\Rightarrow (t - 4)^2 = 0 \\ t = 4 &\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 4 \Rightarrow -\frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = -8 \end{aligned}$$

3、試解指數方程式：

$$(1) 9^x - 21 \cdot 3^{x-1} - 18 = 0 \quad (2) 6^x - 8 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x + 24 = 0$$

答案：(1) 2 (2) 3、1

解析：

$$\begin{aligned} (1) 9^x - 21 \cdot 3^{x-1} - 18 = 0 \\ t = 3^x &\Rightarrow t^2 - 7t - 18 = 0 \\ (t - 9)(t + 2) = 0 &\Rightarrow t = 9, -2 \Rightarrow 3^x = 9, x = 2 \\ &\text{(負不合)} \end{aligned}$$

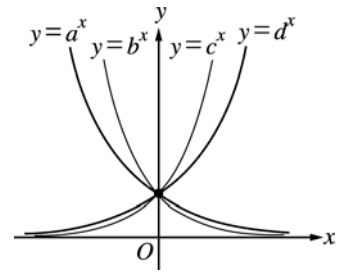
(2) 設 $a = 3^x$ ， $b = 2^x$ ，且 $6^x = 3^x \cdot 2^x = ab$

$$\begin{aligned} ab - 8a - 3b + 24 = 0 \\ (a - 3)(b - 8) = 0 &\Rightarrow a = 3, b = 8 \\ 3^x = 3, 2^x = 8 &\Rightarrow x = 1 \text{ 或 } 3 \end{aligned}$$

4、右圖中 A, B, C, D 分別為 $y_1 = a^x, y_2 = b^x, y_3 = c^x, y_4 = d^x$ 的部分同形

(1) 試判斷 a, b, c, d 大小

(2) 若 $x = k, k < 0$ ，試判斷 y_1, y_2, y_3, y_4 大小，並與 $0, 1$ 比較



答案：(1) $c > d > a > b$ (2) $y_2 > y_1 > 1 > y_4 > y_3 > 0$

解析：

(1) 底大於 1 時，底越大，圖形越靠近兩軸

底小於 1 大於 0 時，分母越大，圖形越靠近兩軸

所以 $c > d > a > b$

(2) 若 $x = k, k < 0$ 為 y 軸左方之鉛垂線

其與 A, B, C, D 四圖由上而下先與 B 、再與 A, D, C 在 x 軸上方相交

所以交點 y 座標由上而下分別為 y_2, y_1, y_4, y_3 ，且 y_2, y_1 大於 1 y_4, y_3 小於 1

其大小 $y_2 > y_1 > 1 > y_4 > y_3 > 0$