高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：99.04.03
範圍	第3回 1-2 指數函數(Ⅱ)	班級		姓名	
		座號			

一、計算題 (每題 25 分)

1、 設 $x>0, x\neq 1$，已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=16$，試求 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}$ 之值。

答案： $3\sqrt{2}$

解析：

$(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})^2=x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}=18$，

$\Rightarrow x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}$(負不合)

2、 設 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$，試求 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^2+x^{-2}+1}$ 之值。

答案： $\dfrac{49}{195}$

解析：

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})+x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow 4^3=x^{\frac{3}{2}}+3(4)+x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=52$

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\Rightarrow 4^2=x+2+x^{-1}\Rightarrow x+x^{-1}=14$

$(x+x^{-1})^2=x+2x\cdot x^{-1}+x^{-2}\Rightarrow 14^2=x^2+2+x^{-2}\Rightarrow x^2+x^{-2}=194$

$\Rightarrow \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^2+x^{-2}+1}=\dfrac{52-3}{194+1}=\dfrac{49}{195}$

3、設 $x\in R$，試求不等式 $\dfrac{1}{729}\leq(\dfrac{1}{9})^{4x}\leq 27$ 之解

答案： $-\dfrac{3}{8}\leq x\leq\dfrac{3}{4}$

解析：

$\dfrac{1}{729}\leq(\dfrac{1}{9})^{4x}\leq 27\Rightarrow(\dfrac{1}{3})^6\leq(\dfrac{1}{3})^{8x}\leq(\dfrac{1}{3})^{-3}$

$\dfrac{1}{3}<1\Rightarrow 6\geq 8x\geq -3\Rightarrow -\dfrac{3}{8}\leq x\leq\dfrac{3}{4}$

4、設 $x\in R$，試解不等式 $3\cdot 27^x-28\cdot 3^{2x-1}+3^x<0$

答案： $-2\leq x\leq 1$

解析：

$3\cdot 27^x-28\cdot 3^{2x-1}+3^x<0$

設 $t=3^x\Rightarrow 3t^3-\dfrac{28}{3}t^2+t<0\Rightarrow t(9t^2-28t+1)<0$

$t(9t-1)(t-3)<0$

$$t>0 \Rightarrow \frac{1}{9}<t<3$$

$$\frac{1}{9}<3^{x}<3 \Rightarrow -2<x<1$$

5、設 $-2 \le x \le 2$ ， $f(x)=2^{x+3}-5\cdot 4^{x}$ ，試求：

(1) $f(x)$ 之最大值 M 。

(2) $f(x)$ 之最小值 m 。

$\boxed{答案}$：(1) $M=\frac{16}{5}$ (2) $m=-48$

$\boxed{解析}$：

設 $t=2^{x} \Rightarrow f(x)=8t-5\cdot t^{2}$

$$=-5(t-\frac{4}{5})^{2}+\frac{16}{5}$$

又 $-2 \le x \le 2$ ，即 $2^{-2} \le 2^{x} \le 2^{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \le t \le 4$

(1) 當 $t=\frac{4}{5}$ ， $f(x)$ 之最大值 $M=\frac{16}{5}$

(2) 當 $t=4$ ， $f(x)$ 之最小 $m=-48$