高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：99.03.23
範圍	1-2,4 指數、對數不等式	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

( )1. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特($\mathrm{W/m^2}$)來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$ ($\mathrm{W/m^2}$)；噪音監測器量度的噪音 dB（分貝）則根據當地聲音的強度 I，透過數學式子 $\mathrm{dB}(I)=10\cdot\log_{10}\dfrac{I}{I_0}$ 計算得來．市政府規定球場內噪音不得超過 65 分貝，而氣笛製造商製造一款低噪音氣笛，一支氣笛只會產生 45 分貝噪音．欲符合市政府噪音規定，球場內最多能同時響起幾支氣笛呢？ (1)10 支 (2)20 支 (3)50 支 (4)100 支 (5)1000 支．

解答 4

解析 設每支氣笛的能量為 w，同時可以響起的氣笛數為 a 支，則根據題意，

$$45=\mathrm{dB}(w)=10\cdot\log_{10}\frac{w}{I_0},\quad 65=\mathrm{dB}(a\cdot w)=10\cdot\log_{10}\frac{a\cdot w}{I_0}\ .$$

將兩式相減得 $65-45=10\cdot\log_{10}\dfrac{a\cdot w}{I_0}-10\cdot\log_{10}\dfrac{w}{I_0}=10\cdot\left(\log_{10}\dfrac{a\cdot w}{I_0}-\log_{10}\dfrac{w}{I_0}\right)$

$$=10\cdot\log_{10}\left(\frac{a\cdot w}{I_0}\times\frac{I_0}{w}\right)=10\cdot\log_{10}a\ .$$

故 $\log a=2$， $a=100$，最多可以同時響起 100 支氣笛．

二、填充題 (每題 10 分)

1. 設 $a=\sqrt[3]{5}$， $b=\left(2\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{7}}$， $c=25^{\frac{\sqrt{3}}{10}}$，則 a， b， c 的大小關係為____________．

解答 $c>a>b$

解析 $a=\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=\left(5^7\right)^{\frac{1}{21}}$

$b=\left[\left(2\sqrt{6}\right)^2\right]^{\frac{1}{7}}=(24)^{\frac{1}{7}}=\left(24^3\right)^{\frac{1}{21}}$

$\because 5^7=\left(5^2\right)^3\cdot 5=25^3\cdot 5>24^3$

$\therefore a>b$

$c=25^{\frac{\sqrt{3}}{10}}=5^{\frac{\sqrt{3}}{5}}$

$\because \dfrac{\sqrt{3}}{5}>\dfrac{1}{3}$

$\therefore c>a$

$\therefore c>a>b$ ．

2. x 為實數，若 $\dfrac{1}{4}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+1}<4$，求 x 的範圍為____________．

解答 $\frac{1}{2}\ge x>-\frac{3}{2}$

解析 $\frac{1}{4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}<4$

$\Rightarrow 2^{-2}\le 2^{-(2x+1)}<2^{2}$

$\Rightarrow -2\le -2x-1<2$

$\Rightarrow -1\le -2x<3$

$\therefore \frac{1}{2}\ge x>-\frac{3}{2}$.

3. 解指數不等式$3^{x^2}<3^{2x}$，得 x 的範圍爲____________ .

解答 $0<x<2$

解析 $\because 3^{x^2}<3^{2x}\Rightarrow x^2<2x\Rightarrow x^2-2x<0\Rightarrow x(x-2)<0\Rightarrow 0<x<2$.

4. 解指數不等式$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<32<\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$，得 x 的範圍爲____________ .

解答 $-6<x<-\frac{5}{2}$

解析 ① $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<32 \quad \Rightarrow 2^{-x-1}<2^{5} \quad \Rightarrow -x-1<5\Rightarrow x>-6$.

② $32<\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \quad \Rightarrow 2^{5}<2^{-2x} \quad \Rightarrow -2x>5\Rightarrow x<-\frac{5}{2}$

由①②知 $-6<x<-\frac{5}{2}$.

5. 滿足$2^{x^2-4}>2^{5x+2}$的 x 的最小正整數爲____________ .

解答 7

解析 $\because 2^{x^2-4}>2^{5x+2}$

$\therefore x^2-4>5x+2$

$\Rightarrow x^2-5x-6>0$

$\Rightarrow (x-6)(x+1)>0$

$\therefore x>6$ 或 $x<-1$，故取 $x=7$.

6. 解不等式$9^{x}-10\cdot 3^{x+1}+81\ge 0$，得 x 的範圍爲____________ .

解答 $x\ge 3$ 或 $0<x\le 1$

解析 $9^{x}-10\cdot 3^{x+1}+81\ge 0\Rightarrow \left(3^{x}\right)^{2}-10\cdot 3^{x}\cdot 3+81\ge 0$

令 $t=3^{x}$

原式 $\Rightarrow t^2-30t+81\ge 0\Rightarrow (t-27)(t-3)\ge 0\Rightarrow t\ge 27$ 或 $0<t\le 3$

即 $3^{x}\ge 27$ 或 $0<3^{x}\le 3\Rightarrow x\ge 3$ 或 $0<x\le 1$.

7. 已知$x>0$，解不等式$x^{x^2-4}\ge\left(x^x\right)^3$，得$x$的範圍爲____________.

$\boxed{解答}$ $0<x\le 1$或$x\ge 4$

$\boxed{解析}$ ① $x=1$ $1\ge 1$成立

② $0<x<1\Rightarrow x^2-4\le 3x\Rightarrow x^2-3x-4\le 0\Rightarrow (x-4)(x+1)\le 0\Rightarrow -1\le x\le 4$ $\therefore 0<x<1$

③ $x>1$ $\Rightarrow x^2-4\ge 3x\Rightarrow x^2-3x-4\ge 0\Rightarrow (x-4)(x+1)\ge 0\Rightarrow x\ge 4$或$x\le -1$ $\therefore x\ge 4$

由①②③知 $0<x\le 1$或$x\ge 4$.

8. 解不等式$2^{1-x}-33\cdot 2^{-\frac{x}{2}-2}+1>0$，得$x$的範圍爲____________.

$\boxed{解答}$ $x<-4$或$x>6$

$\boxed{解析}$ $2^{1-x}-33\cdot 2^{-\frac{x}{2}-2}+1>0\Rightarrow 2^1\cdot 2^{-x}-33\cdot 2^{-\frac{x}{2}}\cdot 2^{-2}+1>0$

令$t=2^{-\frac{x}{2}}>0$

原式$\Rightarrow 2t^2-\dfrac{33}{4}t+1>0\Rightarrow 8t^2-33t+4>0\Rightarrow (8t-1)(t-4)>0$ $\Rightarrow t>4$或$0<t<\dfrac{1}{8}$

即$2^{-\frac{x}{2}}>4$或$0<2^{-\frac{x}{2}}<\dfrac{1}{8}\Rightarrow -\dfrac{x}{2}>2$或$-\dfrac{x}{2}<-3$ $\therefore x<-4$或$x>6$.

9. 設$f(x)=4^x-2^{x+1}-1$，$-1\le x\le 1$，求$f(x)$的最大值爲(1)__________，最小值爲(2)__________.

$\boxed{解答}$ (1)-2;(2)-1

$\boxed{解析}$ 令$t=2^x$

$\because -1\le x\le 1\Rightarrow \dfrac{1}{2}\le t\le 2$

原式$\Rightarrow t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

(1)當$t=1$時，有最小值-2 .

(2)當$t=2$時，有最大值-1 .

10. 設$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}+1$，$0\le x\le 1$

若$f(x)$的最大值爲M，最小值爲m，求數對$(M,m)=$____________.

$\boxed{解答}$ $\left(-\dfrac{8}{9},-4\right)$

$\boxed{解析}$ $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}+1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+1$

令$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ $\because 0\le x\le 1$ $\therefore \dfrac{1}{3}\le t\le 1$

原式$\Rightarrow t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

①當$t=\dfrac{1}{3}$時，有最大值$M=-\dfrac{8}{9}$

②當 $t=1$時，有最小值 $m=-4$

$\therefore (M,m)=\left(-\dfrac{8}{9},-4\right)$ ．

11. 設 $-2\le x\le 8$，若函數 $f(x)=2^x-2^{\frac{x+4}{2}}$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，求數對 $(M,m)=$__________．

解答　$(192,-4)$

解析　$f(x)=2^x-2^{\frac{x+4}{2}}=2^x-2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^2$

令 $t=2^{\frac{x}{2}}$　$\because -2\le x\le 8$　　$\therefore \dfrac{1}{2}\le t\le 16$

原式 $\Rightarrow t^2-4t=(t-2)^2-4$

① $t=2$ 時，有最小值 $m=-4$

② $t=16$ 時，有最大值 $M=192$

$\therefore (M,m)=(192,-4)$ ．

12. 設 $f(x)=(4^x+4^{-x})+(2^x+2^{-x})+5$，$x$爲實數，令 $t=2^x+2^{-x}$，求

(1) $f(x)=$__________（以 t 表示）(2) $f(x)$ 的最小值爲__________．

解答　(1) t^2+t+3;(2)9

解析　(1)令 $t=2^x+2^{-x}$（$t\ge 2$）$\Rightarrow t^2=4^x+4^{-x}+2$

$\therefore 4^x+4^{-x}=t^2-2$

原式 $\Rightarrow f(x)=(t^2-2)+t+5=t^2+t+3$ ．

(2) $f(x)=t^2+t+3=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

$\because t\ge 2$

$\therefore f(x)$ 之最小值爲 $\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}=9$ ．

13. 已知 $0<a<1$ 且 $a^{2x}+a^x-2\le 0$，求 x 的範圍爲__________．

解答　$x\ge 0$

解析　令 $t=a^x$，原式 $\Rightarrow t^2+t-2\le 0$　$\Rightarrow (t+2)(t-1)\le 0$　$\Rightarrow -2\le t\le 1$

又 $t=a^x>0$　　$\therefore 0<t\le 1$　即 $0<a^x\le 1\Rightarrow 0<a^x\le a^0$

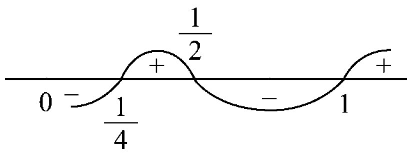
又 $0<a<1$　　$\therefore x\ge 0$ ．

14. 試解不等式 $(3^x-3)(9^x-3)(81^x-3)<0$，得 x 的範圍爲__________．

解答　$x<\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<1$

解析　$(3^x-3)(9^x-3)(81^x-3)<0\Rightarrow (3^x-3^1)(3^{2x}-3^1)(3^{4x}-3^1)<0$

$3>1 \Rightarrow (x-1)(2x-1)(4x-1)<0$



$\therefore x<\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{2}<x<1$.

15. 解不等式 $\log_3(x-4)<\log_9(x-2)$ ，得 x 的範圍爲____________ .

解答 $4<x<6$

解析 (1) $x-4>0$ 且 $x-2>0 \Rightarrow x>4$

(2) $\log_9(x-4)^2<\log_9(x-2)$

$\Rightarrow (x-4)^2<x-2$

$\Rightarrow x^2-9x+18<0$

$\Rightarrow (x-6)(x-3)<0$

$\Rightarrow 3<x<6$

由(1)(2)知 $4<x<6$.

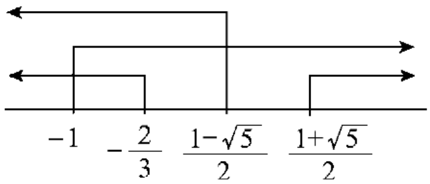
16. 解 $\log_{0.5}(x+1)>\log_{0.25}(x^2-x-1)$ ，得 x 的範圍爲____________ .

解答 $-1<x<-\frac{2}{3}$

解析 (1)真數恆正： $x+1>0$ 且 $x^2-x-1>0$

$\Rightarrow x>-1$ 且 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow -1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



(2) $\log_{0.5}(x+1)>\log_{0.25}(x^2-x-1)$

$\Rightarrow \log_{0.25}(x+1)^2>\log_{0.25}(x^2-x-1)$

$\Rightarrow (x+1)^2<x^2-x-1$

$\Rightarrow x^2+2x+1<x^2-x-1$

$\Rightarrow 3x<-2$

$\Rightarrow x<-\frac{2}{3}$

由(1)(2)知 $-1<x<-\frac{2}{3}$.

17. 解不等式 $1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$ ，得 x 的範圍爲____________ .

解答 $1<x<3$

解析 (1)原式 $\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}(x-1)^2 > \log_{\frac{1}{4}}(4-x)$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(x-1)^2 < 4-x$

$\Rightarrow x^2+2x-15<0$

$\Rightarrow (x+5)(x-3)<0$

$\Rightarrow -5<x<3$

(2)真數恆正： $x-1>0$ 且 $4-x>0$

$\Rightarrow 1<x<4$

由(1)(2)知　$1<x<3$ ．

18. 解不等式$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>-2$，得$x$的範圍爲____________ ．

解答　$1<x<16$

解析　$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow 0<\log_2 x<4 \Rightarrow \log_2 1<\log_2 x<\log_2 2^4$

$\therefore 1<x<16$ ．

19. 若$-2\le\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 6x)<0$，則$x$的範圍爲____________ ．

解答　$\frac{1}{2}<x\le\frac{27}{2}$

解析　原式$\Rightarrow -2\le\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 6x)<0$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\le\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 6x)<\log_{\frac{1}{2}}1$

$\Rightarrow 4\ge\log_3 6x>1$

$\Rightarrow \log_3 3^4\ge\log_3 6x>\log_3 3$

$\Rightarrow 81\ge 6x>3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}<x\le\frac{27}{2}$ ．

20. 解不等式$\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)\right]>0$，得$x$的範圍爲____________ ．

解答　$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

解析　$\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)\right]>0=\log_{\frac{1}{3}}1$

$\Rightarrow 0<\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1$

$\Rightarrow \log_2 1 < \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < \log_2 2$

$\Rightarrow 1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} > x > \frac{1}{4}$　即$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ ．

21. x爲實數，若$\log_2\left(x^2+3x+a\right)$的值恆爲正，則$a$的範圍爲____________．

解答　$a > \frac{13}{4}$

解析　$\log_2\left(x^2+3x+a\right) > 0 = \log_2 1$

$\Rightarrow x^2+3x+a > 1$

$\Rightarrow x^2+3x+(a-1) > 0$

$\Rightarrow D = 3^2 - 4(a-1) < 0$

$\Rightarrow 4a > 13$

$\Rightarrow a > \frac{13}{4}$ ．

22. 已知$A=\log_2 2^{0.2}$， $B=\log_2 0.2^2$， $C=\log_{0.2} 2^2$，則A， B， C的大小關係爲____________．

解答　$A > C > B$

解析　$A=\log_2 2^{0.2}=0.2$

$B=\log_2 0.2^2=\log_2\left(\frac{1}{5}\right)^2=-2\log_2 5<-2\log_2 2=-2$

$C=\log_{0.2} 2^2=2\log_{\frac{1}{5}} 2=-2\log_5 2>-2\log_5 5=-2$

$\therefore A > C > B$ ．

23. 解不等式$3^{1+\log x}\cdot x^{\log 3}-10x^{\log 3}+3>0$， x的範圍爲____________．

解答　$x>10$或$0<x<\frac{1}{10}$

解析　$3^{1+\log x}\cdot x^{\log 3}-10x^{\log 3}+3>0$

令$t=3^{\log x}=x^{\log 3}$， $x>0$（真數>0）

$\therefore (3t)(t)-10t+3>0 \Rightarrow 3t^2-10t+3>0$

$\Rightarrow (3t-1)(t-3)>0 \Rightarrow t>3$或$t<\frac{1}{3}$

(1) $3^{\log x}>3 \Rightarrow \log x>1 \Rightarrow x>10$

(2) $3^{\log x}<\frac{1}{3}=3^{-1} \Rightarrow \log x<-1 \Rightarrow 0<x<\frac{1}{10}$

$\therefore\ x>10$ 或 $0<x<\dfrac{1}{10}$.

24. 解不等式 $\log x-6\log_x 10>1$，得 x 的範圍為____________ .

解答　$x>10^3$ 或 $10^{-2}<x<1$

解析　令 $\log x=k$

原式 $\Rightarrow k-\dfrac{6}{k}>1 \quad \Rightarrow k-\dfrac{6}{k}-1>0 \quad \Rightarrow \dfrac{k^2-6-k}{k}>0$

$\Rightarrow k(k-3)(k+2)>0 \qquad \Rightarrow k>3$ 或 $-2<k<0$

即 $\log x>3$ 或 $-2<\log x<0 \Rightarrow x>10^3$ 或 $10^{-2}<x<1$.

25. 解不等式 $10^{1-\log x}>10^{\frac{1}{2}\log x}+\dfrac{1}{2}$，得 x 的範圍為____________ .

解答　$0<x<4$

解析　原式 $\Rightarrow 10^1\times10^{-\log x}>10^{\log x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{2} \Rightarrow 10\times\dfrac{1}{x}>x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}$

令 $x^{\frac{1}{2}}=t>0$

原式 $\Rightarrow \dfrac{10}{t^2}>t+\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow 20>2t^3+t^2 \Rightarrow 2t^3+t^2-20<0 \quad \Rightarrow (t-2)(2t^2+5t+10)<0$

$\because D<0$，恆正　$\therefore 2t^2+5t+10>0$

$\therefore t-2<0 \Rightarrow t<2$

即 $x^{\frac{1}{2}}<2 \Rightarrow x<4$　　而真數 x 恆正　$\therefore 0<x<4$.

26. 解不等式 $\log_x(5x-4)>2$，得 x 的範圍為____________ .

解答　$1<x<4$ 或 $\dfrac{4}{5}<x<1$

解析　真數恆正且底數 $x>0$ 且 $x\neq1$　　$\therefore x>\dfrac{4}{5}$ 且 $x\neq1$

(1) $x>1$

$\log_x(5x-4)>\log_x x^2$

$\Rightarrow 5x-4>x^2$

$\Rightarrow x^2-5x+4<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-4)<0$

$\Rightarrow 1<x<4$

(2) $\dfrac{4}{5}<x<1$

$\log_x(5x-4)>\log_x x^2$

$\Rightarrow 5x-4<x^2$

$\Rightarrow x^2-5x+4>0$

$\Rightarrow (x-1)(x-4)>0$

$\Rightarrow x>4$ 或 $x<1$

$\Rightarrow \frac{4}{5} < x < 1$

由(1)(2)知　$1 < x < 4$ 或 $\frac{4}{5} < x < 1$ ．