高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.03.09					
範圍	1-1,3 指數、對數	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 （ 每題 5 分 ）

（　　　）1.下列何者為真？ (1) $\log_2(-5)^2 = 2\log_2(-5)$ (2) $\log_2(3\times5) = (\log_2 3)(\log_2 5)$

(3) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ (4) $\log_2(5^3) = (\log_2 5)^3$ (5) $\log_2(3+5) = \log_2 3 + \log_2 5$.

解答 3

解析 (1)╳：真數必恆正．

(2)╳： $\log_2(3\times5) = \log_2 3 + \log_2 5 \neq (\log_2 3)(\log_2 5)$ ．

(3)○： $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_2 8 + \log_{2^{-1}} 8 = \log_2 8 - \log_2 8 = 0$ ．

(4)╳： $\log_2 5^3 = 3\log_2 5 \neq (\log_2 5)^3$ ．

(5)╳： $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2(3\times5) \neq \log_2(3+5)$ ．

（　　　）2. $\log_2 64\sqrt{2} =$ (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{11}{2}$ (3) $\frac{13}{2}$ (4) $\frac{15}{2}$ (5)7 .

解答 3

解析 $\log_2 2^6 \times 2^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{13}{2}} = \frac{13}{2}\log_2 2 = \frac{13}{2}$ ．

（　　　）3. $\log_2 13 + \frac{1}{2}\log_2 25 + \log_2 \frac{4}{7} - \log_2 \frac{65}{7} =$ (1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5 .

解答 2

解析 原式 $= \log_2 13 + \log_2 25^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{4}{7} - \log_2 \frac{65}{7} = \log_2 \dfrac{13\times5\times\frac{4}{7}}{\frac{65}{7}} = \log_2 4 = 2$ ．

二、多選題 （ 每題 10 分 ）

（　　　）1.以下各數何者為正？ (1) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$ (2) $\log_2 3 - 1$ (3) $\log_3 2 - 1$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ (5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.

解答 125

解析 (1) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ， $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ，

底數 2 比 1 大，指數越大其值越大， 因此 $\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$ 即 $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$ 為正．

(2)因 $3>2$ ，所以 $\log_2 3 = 1.\cdots > \log_2 2$ ， 即 $\log_2 3 > 1$ ，故 $\log_2 3 - 1$ 為正．

(3)因 $3>2$ ，所以 $\log_3 3 > \log_3 2 = 0.\cdots$ ， 即 $1 > \log_3 2$ ，故 $\log_3 2 - 1$ 為負．

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{2^{-1}} 3 = -\log_2 3 < 0$ ．

(5) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_{3^{-1}}2^{-1}=\frac{-1}{-1}\log_3 2=\log_3 2>0$.

(　　　) 2.下列何者爲真? (1) $(-2)^{-2}=4$ (2) $\log_6 2+\log_6 3=1$ (3) $\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}=\log_5 7$

(4) $3^{\log 7}\times 7^{\log 3}=1$ (5) $5^{3\log_5 2}=6$.

解答 23

解析 (1)╳: $(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$.

(2)○: $\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\times 3)=\log_6 6=1$.

(3)○: $\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}=\log_{5^{\frac{1}{2}}}7^{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_5 7=\log_5 7$.

(4)╳: $3^{\log 7}\times 7^{\log 3}=7^{\log 3}\times 7^{\log 3}=7^{\log 3+\log 3}=7^{2\log 3}=7^{\log 9}=7^{0.9\cdots}\neq 1$.

(5)╳: $5^{3\log_5 2}=5^{\log_5 2^3}=2^3=8$.

三、填充題 (每題 10 分)

1. 設 $(2.5)^x=(0.25)^y=1000$，求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=$____________ .

解答 $\frac{1}{3}$

解析 $(2.5)^x=1000\Rightarrow 2.5=1000^{\frac{1}{x}}\cdots(1)$

$(0.25)^y=1000\Rightarrow 0.25=1000^{\frac{1}{b}}\cdots(2)$

$\frac{(1)}{(2)}$ 得 $\frac{2.5}{0.25}=1000^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\Rightarrow 10=10^{3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$,$3(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})=1\Rightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

2. 設 $\sqrt[x]{27^{x-1}}=\sqrt[y]{9}$ 且 $2^x=\left(\frac{1}{8}\right)^{-y}$，求 $x-y=$____________ .

解答 2

解析 $\sqrt[x]{27^{x-1}}=\sqrt[y]{9}\Rightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}}=3^{\frac{2}{y}}$, $3-\frac{3}{x}=\frac{2}{y}\Rightarrow\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=3\cdots(1)$

$2^x=\left(\frac{1}{8}\right)^{-y}\Rightarrow 2^x=2^{3y}\Rightarrow x=3y\cdots(2)$ 由(1)(2) 解得 $x=3$，$y=1$ $\therefore x-y=2$.

3. 設 $a=\left(\frac{1}{5}\right)^{0.4}$，$b=\frac{1}{\sqrt[6]{25}}$，$c=\sqrt[5]{\frac{1}{125}}$，$d=25^{-\frac{1}{4}}$，試比較 a 、 b 、 c 、 d 的大小____________ .

解答 $b>a>d>c$

解析 $a=\left(\frac{1}{5}\right)^{0.4}=5^{-0.4}$

$b=\frac{1}{\sqrt[6]{25}}=5^{-\frac{1}{3}}\fallingdotseq 5^{-0.33}$

$c=\sqrt[5]{\frac{1}{125}}=5^{-\frac{3}{5}}=5^{-0.6}$

$d=25^{-\frac{1}{4}}=\left(5^2\right)^{-\frac{1}{4}}=5^{-\frac{1}{2}}=5^{-0.5}$

$-0.33>-0.4>-0.5>-0.6\Rightarrow b>a>d>c$.

4. 解方程式 $2^{2x+3}=8^{3x-1}$，求 $x=$______________ .

解答 $\frac{6}{7}$

解析 原式 $\Rightarrow 2^{2x+3}=\left(2^3\right)^{3x-1}$ $\quad\therefore 2x+3=9x-3$ $\quad\Rightarrow x=\frac{6}{7}$.

5.已知 $4^{2a}=9$，求 $\frac{3\cdot 2^{3a}-2^{-3a}}{2^a+2^{-a}}=$______________ .

解答 $\frac{20}{3}$

解析 分子分母同乘以 2^a 得 $\frac{3\cdot 2^{4a}-2^{-2a}}{2^{2a}+1}$

又 $4^{2a}=9\Rightarrow 2^{4a}=9\Rightarrow 2^{2a}=3$ ，所求 $=\frac{3\cdot 9-\frac{1}{3}}{3+1}=\frac{20}{3}$.

6. 設 $x>0$，且 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+7}{x^2+x^{-2}+3}=$______________ .

解答 $\frac{1}{2}$

解析 分子：$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)=3^3-3\cdot 1\cdot 3\ =18$

分母：$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3\ \Rightarrow\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=9$

$x+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}=9\ \Rightarrow x+x^{-1}=7\ \Rightarrow\left(x+x^{-1}\right)^2=49\ \Rightarrow x^2+x^{-2}+2=49$

$\therefore x^2+x^{-2}=47$ ，原式 $=\frac{18+7}{47+3}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$.

7. 已知 $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\times\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^3}=2$，求 $x=$______________ .

解答 $\frac{3}{4}$

解析 原式$\Rightarrow\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x}\times\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{2}}=2$

$$\Rightarrow 2^{\frac{x}{3}}\times 2^{\frac{3}{4}}=2 \quad \Rightarrow 2^{\frac{x}{3}+\frac{3}{4}}=2 \quad \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{3}{4}=1 \quad \Rightarrow x=\frac{3}{4}\ .$$

8. 已知x，y，z爲異於0的有理數，且$x+y+z=0$，若$a=10^{x}$，$b=10^{y}$，$c=10^{z}$，求$a^{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\times b^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\times c^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=$__________.

解答 $\frac{1}{1000}$

解析 $a^{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\times b^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\times c^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\left(10^{x}\right)^{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\times\left(10^{y}\right)^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\times\left(10^{z}\right)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$$=10^{\frac{x}{y}+\frac{x}{z}}\times 10^{\frac{y}{z}+\frac{y}{x}}\times 10^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=10^{\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=10^{\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}}=10^{\frac{-y}{y}+\frac{-z}{z}+\frac{-x}{x}}=10^{-3}=\frac{1}{1000}\ .$$

9. 設$4^{x}-3\cdot 2^{x+2}+\sqrt{8}=0$的二根爲$\alpha$，$\beta$，求$\alpha+\beta=$__________.

解答 $\frac{3}{2}$

解析 令$t=2^{x}$，則原式$\Rightarrow t^{2}-12t+\sqrt{8}=0$且二根爲$2^{\alpha},2^{\beta}$

$$設\begin{cases}t_1=2^{\alpha}\\ t_2=2^{\beta}\end{cases}\Rightarrow t_1\cdot t_2=2^{\alpha}\cdot 2^{\beta}=2^{\alpha+\beta}=\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}} \qquad \therefore\alpha+\beta=\frac{3}{2}\ .$$

10.已知x爲實數，若$(x-1)^{x+4}=(x-1)^{7}$，求$x=$__________.

解答 1,2,3

解析 ① $x-1=0\Rightarrow x=1$，左$=0^{5}=0$，右$=0$，成立

② $x-1=-1\Rightarrow x=0$，左$=(-1)^{4}=1$，右$=(-1)^{7}=-1$，不合

③ $x-1=1\Rightarrow x=2$，左$=1^{6}=1$，右$=1^{7}=1$，成立

④ $x-1\neq 0,-1,1$，則$x+4=7\Rightarrow x=3$.

$\therefore x=1,2,3$.

11.設$a>0$，若$a^{3x}+a^{-3x}=18$，求$a^{x}+a^{-x}=$__________.

解答 3

解析 令$a^{x}+a^{-x}=t$

$$a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^{x}+a^{-x}\right)^{3}-3a^{x}\cdot a^{-x}\left(a^{x}+a^{-x}\right) \Rightarrow t^{3}-3t=18\Rightarrow t^{3}-3t-18=0$$

$$\begin{array}{l} 1+0-3-18 \ \lfloor 3 \\ \quad +3+9+18 \\ \hline 1+3+6, \quad 0 \end{array} \qquad \Rightarrow (t-3)(t^2+3t+6)=0 \ \therefore t-3=0 \Rightarrow t=3 \ .$$

12.若已知 x 爲實數 $8(4^x+4^{-x})-38(2^x+2^{-x})+33=0$，

(1)令 $t=2^x+2^{-x}$，則原方程式表成 t 的方程式爲____________．(2) x 的解爲____________．

解答 (1) $8t^2-38t+17=0$ (2)2 或 -2

解析 令 $t=2^x+2^{-x}$（$t\geq 2$），則 $4^x+4^{-x}=t^2-2$

原式 $\Rightarrow 8(t^2-2)-38t+33=0$

$\Rightarrow 8t^2-38t+17=0 \Rightarrow (4t-17)(2t-1)=0 \Rightarrow t=\frac{17}{4}$ 或 $t=\frac{1}{2}$（不合），即 $2^x+2^{-x}=\frac{17}{4}$

令 $k=2^x$，則 $k+\frac{1}{k}=\frac{17}{4} \Rightarrow 4k^2+4=17k$

$\Rightarrow 4k^2-17k+4=0 \Rightarrow (k-4)(4k-1)=0 \Rightarrow k=4$ 或 $k=\frac{1}{4}$

即 $2^x=4$ 或 $2^x=\frac{1}{4}$ 故 $x=2$ 或 $x=-2$ ．

13.設 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2010^{\frac{1}{2010}}+2010^{-\frac{1}{2010}}\right)$，求 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)\right]^{2010}$ 的值爲____________．

解答 2010

解析 $\because x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2010^{\frac{1}{2010}}+2006^{\frac{-1}{2010}}\right)$

$$\therefore x^2=\frac{1}{2}\left(2010^{\frac{2}{2010}}+2\cdot 2010^{\frac{1}{2010}}\cdot 2006^{\frac{-1}{2010}}+2006^{\frac{-2}{2010}}\right)$$

$$x^2-2=\frac{1}{2}\left(2010^{\frac{2}{2010}}+2+2010^{\frac{-2}{2010}}\right)-2 \quad =\frac{1}{2}\left(2010^{\frac{2}{2010}}-2+2010^{\frac{-2}{2010}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2010^{\frac{1}{2010}}-2010^{\frac{-1}{2010}}\right)^2 \quad =\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2010^{\frac{1}{2010}}-2010^{\frac{-1}{2010}}\right)\right]^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2010^{\frac{1}{2010}}-2010^{\frac{-1}{2010}}\right)$$

$$原式=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2010^{\frac{1}{2010}}+2010^{\frac{-1}{2010}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2010^{\frac{1}{2010}}-2010^{\frac{-1}{2010}}\right)\right]\right\}^{2010}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}2010^{\frac{1}{2010}}\right)\right]^{2010}=2010\ .$$

14.設 a，b，c 表△ ABC 的三邊長，且 $a+b+c=6$，若 $2^{a+b}+2^{b+c}+2^{c+a}=4^a+4^b+4^c$，求△ ABC 的面積為＿＿＿＿＿．

解答　$\sqrt{3}$

解析　令 $x=2^a$，$y=2^b$，$z=2^c$

原式 $\Rightarrow 2^a\cdot 2^b+2^b\cdot 2^c+2^c\cdot 2^a=\left(2^a\right)^2+\left(2^b\right)^2+\left(2^c\right)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right]=0\ \Rightarrow x=y=z\ \Rightarrow 2^a=2^b=2^c\ \ \Rightarrow a=b=c$

表示△ ABC 為正三角形，面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$ ．

15.設 $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}},\ \beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$，且 $k=\alpha+\beta$，試求

(1) $\alpha\beta=$＿＿＿＿＿＿　(2) $k^3-3k=$＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)1;(2)4

解析　(1) $\because \alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}},\ \beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha\beta=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt[3]{4-3}=1$

(2) $k^3-3k=\left(\alpha+\beta\right)^3-3\left(\alpha+\beta\right)\ =\left(\alpha+\beta\right)^3-3\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)\ =\alpha^3+\beta^3$

$=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^3=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$ ．

16. $\log_{(x-2)}\left(-3x^2+13x-4\right)$ 有意義，則實數 x 的範圍為＿＿＿＿＿＿．

解答　$2<x<4$ 且 $x\neq 3$

解析　(1)底數：$x-2>0$ 且 $x-2\neq 1\Rightarrow x>2$ 且 $x\neq 3$

(2)真數：$-3x^2+13x-4>0\ \ \Rightarrow 3x^2-13x+4<0\Rightarrow \left(3x-1\right)\left(x-4\right)<0\ \Rightarrow \frac{1}{3}<x<4$

由(1)(2)知　$2<x<4$ 且 $x\neq 3$ ．

17.化簡下列各式．

(1) $\log_{0.25}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\log_4 2=$＿＿＿＿＿＿　(2) $2\log_2 6+\log_2\frac{1}{9}=$＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) $-\frac{1}{2}$;(2)2

解析　(1) $\log_{0.25}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\log_4 2=\log_{\frac{1}{4}}\log_{2^{-\frac{1}{2}}}\log_{2^2}2$

$$=\log_{2^{-2}}\log_{2^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}\log_2 2\right)=\log_{2^{-2}}\left(\log_{2^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\log_{2^{-2}}\left(\frac{-1}{-\frac{1}{2}}\log_2 2\right)=\log_{2^{-2}}2=-\frac{1}{2}\log_2 2=-\frac{1}{2}\ .$$

(2) $2\log_2 6+\log_2\frac{1}{9}=\log_2 6^2+\log_2\frac{1}{9}=\log_2 36\times\frac{1}{9}=\log_2 4=\log_2 2^2=2$.

18.化簡$\left(\log_2\frac{1}{125}+\log_4\sqrt[3]{25}\right)\left(\log_5 4+\log_{25}\sqrt{32}\right)=$＿＿＿＿＿＿ .

解答 $-\frac{26}{3}$

解析 原式$=\left(\log_2 5^{-3}+\log_2 5^{\frac{1}{3}}\right)\left(\log_5 4+\log_5 2^{\frac{5}{4}}\right)$

$$=\left(-3\log_2 5+\frac{1}{3}\log_2 5\right)\left(2\log_5 2+\frac{5}{4}\log_5 2\right)$$

$$=\left(-\frac{8}{3}\log_2 5\right)\left(\frac{13}{4}\log_5 2\right)=\left(-\frac{8}{3}\times\frac{13}{4}\right)\left(\log_2 5\times\log_5 2\right)=-\frac{26}{3}\log_2 2=-\frac{26}{3}\ .$$

19.$5^{\frac{\log_2 6}{\log_2 5}}+4^{\frac{1}{\log_5 4}}+2^{-\log_4 9}+9^{\log_3 2}=$＿＿＿＿＿＿ .

解答 $15\frac{1}{3}$

解析 原式$=5^{\log_5 6}+4^{\log_4 5}+2^{\log_2 3^{-1}}+9^{\log_9 4}=6+5+\frac{1}{3}+4=15\frac{1}{3}$.

20.解$\log_x 9-\log_3 x=-1$，得$x=$＿＿＿＿＿＿ .

解答 $x=9$或$x=\frac{1}{3}$

解析 $\log_x 3^2-\log_3 x=-1$

令$t=\log_x 3$

原式$\Rightarrow 2t-\frac{1}{t}=-1$

$\Rightarrow 2t^2+t-1=0$

$\Rightarrow (2t-1)(t+1)=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$或$t=-1$

即$\log_x 3=\frac{1}{2}$或$\log_x 3=-1\Rightarrow 3=x^{\frac{1}{2}},3=x^{-1}$ $\therefore x=9$或$x=\frac{1}{3}$.