| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.01.12 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 3-4 多項函數 | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、單選題( 每題 5 分)

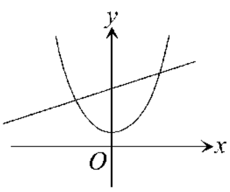
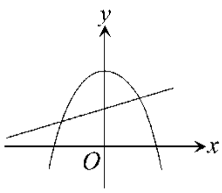
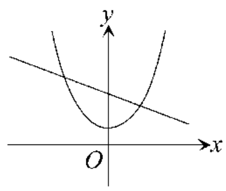
1. 設 $a$，$b$，$c\in R$ 且 $a\neq 0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，$\delta=b^2-4ac$，若$\forall x\in R$，$f(x)$恆大於 0，則
   (A) $a>0$，$\delta>0$ (B) $a<0$，$\delta<0$ (C) $a>0$，$\delta<0$ (D) $a<0$，$\delta>0$ (E)以上皆非

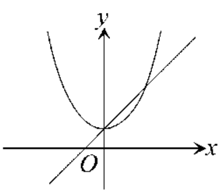
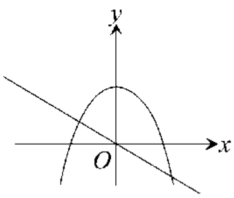
【解答】(C)

【詳解】

$f(x)=ax^2+bx+c>0$，$\forall x\in R$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$

2.下列何者可能是直線 $y=ax+b$ 與拋物線 $y=ax^2+b$ 圖形的聯集？

(A)

(B)

(C)


(D)

(E)


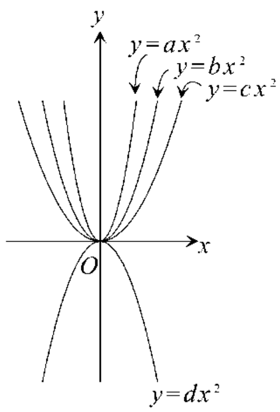
【解答】(D)

【詳解】

直線 $y=ax+b$，拋物線 $y=ax^2+b$ 與 $y$ 軸交點均爲$(0，b)$

又 $a>0$ 時，$y=ax+b$ 的斜率爲正，直線向右上升，

拋物線 $y=ax^2+b$ 開口向上




二、多重選擇題( 每題 10 分)

1. 坐標平面上有四個拋物線方程式的圖形如右，試選出下列敘述正確者？
   (A) $a>d$ (B) $b>d$ (C) $c>d$ (D) $c>b$ (E) $a>b$

【解答】(A)(B)(C)(E)

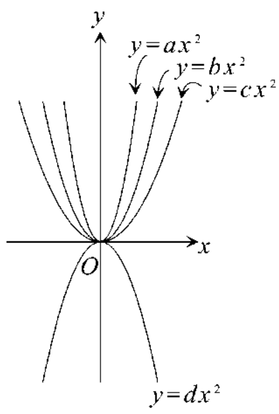
【詳解】

二次函數 $y=mx^2$，

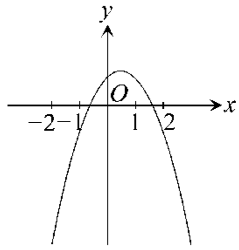
$m>0$ 時開口向上，

$m<0$ 時開口向下

又 $|m|$ 愈大開口愈小 $\Rightarrow$ $a>b>c>0>d$



2. 拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如左，請問下列各式之值何者爲正？




(A) $ac$　(B) $a + b + c$　(C) $a - b + c$　(D) $b^2 - 4ac$　(E) $2a + b$

【解答】(B)(D)

【詳解】

(A) ∵　開口朝下　∴　$a < 0$，$y$ 截距 $c > 0$　⇒　$ac < 0$

(B) 由圖形可知 $x = 1 \Rightarrow f(1) = a + b + c > 0$

(C) 由圖形可知 $x = -1 \Rightarrow f(-1) = a - b + c < 0$

(D)正確：拋物線與 $x$ 軸交於相異兩點　∴　$b^2 - 4ac > 0$

(E)頂點坐標($\dfrac{-b}{2a}$ ，$\dfrac{4ac - b^2}{4a}$)，由圖知 $x = \dfrac{-b}{2a} < 1 \Rightarrow -b > 2a$（∵　$a < 0$）　∴$2a + b < 0$

3. 下列各拋物線，何者與 $y = -x^2$ 全等（開口大小相同）？

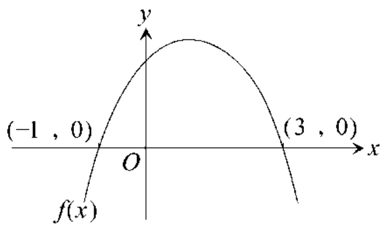
(A) $y = 2x^2$　(B) $y = x^2$　(C) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$　(D) $y = x^2 + x + 3$　(E) $y = -x^2 + x + 8$

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】

利用拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的 $x^2$ 項係數 $a$ 決定開口大小，$|a|$愈大者開口愈小，$|a|$ 愈小者開口愈大，$|a|$ 相同者拋物線全等，而 $b$，$c$ 決定拋物線的平移位置

4. 若函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形如下圖，則下列敘述何者正確？




(A) $a < 0$　(B) $b > 0$　(C) $c < 0$　(D) $b^2 - 4ac < 0$

(E) $9a + 4b + 2c > 0$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

(A)∵　圖形開口向下　∴　$a < 0$

(B) 頂點爲($-\dfrac{b}{2a}$ ，$-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$)在第一象限　∴　$-\dfrac{b}{2a} > 0$　⇒　$b > 0$ (與 $a$ 左同右異)

(C)∵　圖形交 $y$ 軸於$(0，c)$　原點上方　∴　$c > 0$

(D)∵　圖形交 $x$ 軸於相異兩點　∴　$f(x) = 0$ 有二不等實根，$D = b^2 - 4ac > 0$

(E) $9a + 4b + 2c = (9a + 3b + c) + (b + c) = f(3) + (b + c) = 0 + (b + c) > 0$

5. 對於二次函數 $f(x) = -x^2 + x + 3$ 的敘述，下列何者正確？

(A)頂點($\dfrac{1}{2}$ ，3)　　(B)對稱軸 $x + \dfrac{1}{2} = 0$

(C)若$-1 \le x \le 1$，則 $f(x)$之最大値$\dfrac{13}{4}$　(D)若$-2 \le x \le 0$，則 $f(x)$之最大値 3

(E)將 $y = -x^2 + x + 3$ 的圖形水平右移 2 單位，再鉛直下移 1 單位所得的拋物線方程式爲

$y = -(x - \dfrac{5}{2})^2 + \dfrac{9}{4}$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $f(x)=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$ $\Rightarrow$ 頂點爲$(\frac{1}{2}，\frac{13}{4})$

(B) 對稱軸：$x-\frac{1}{2}=0$

(C) 由 $x=\frac{1}{2}$於$-1\le x\le 1$ 範圍內，故最大値爲$\frac{13}{4}$

(D) 由 $x=\frac{1}{2}$不於$-2\le x\le 0$ 範圍內　，故最大値爲 $f(0)=3$

(E) $y=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$右移 2，下移 1$\Rightarrow y+1=-[(x-2)-\frac{1}{2}]^2+\frac{13}{4}$得 $y=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}$

三、填充題( 每題 10 分)

1. 二次函數 $y=ax^2+bx+5$ 在 $x=2$ 時有最小值 3，則數對$(a，b)=$ __________。

【解答】$(\frac{1}{2}，-2)$

【詳解】

$y=ax^2+bx+5$

$=a(x-2)^2+3=ax^2-4ax+(4a+3)$比較係數$\Rightarrow\begin{cases}-4a=b\\4a+3=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-2\end{cases}$

$\therefore$ $(a，b)=(\frac{1}{2}，-2)$

2. 設 $m$ 爲實數，若二次函數 $y=mx^2+2x+m-2$ 之圖形恆在直線 $y=-2$ 的上方，則 $m$ 的範圍爲__________。

【解答】$m>1$

【詳解】

$mx^2+2x+m-2>-2$ 恆成立，即 $mx^2+2x+m>0$ 恆成立

則$\begin{cases}m>0\\4-4m^2<0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}m>0 & \cdots\cdots ①\\m<-1 \text{ 或 } m>1 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①∩②得 $m>1$

3. 設 $y=x^2-2ax+a$ 的圖形恆在 $y=-2$ 的圖形上方，則實數 $a$ 的範圍爲__________。

【解答】$-1<a<2$

【詳解】

$x^2-2ax+a-(-2)$恆正，

$\therefore$ $D=a^2-(a+2)=(a-2)(a+1)<0$ $\therefore$ $-1<a<2$

4. 某電影院的每張票價 200 元時，觀眾有 600 人，若票價每減少 10 元時，則觀眾就增加 50 人，則每張電影票價訂為__________元時，可使電影院的收入最多。

【解答】160

【詳解】

設票價減 $10x$ 元時，可使收入最多

收入 $= (200-10x)(600+50x) = 500(-x^2+8x+240) = 500[-(x-4)^2+256]$

當 $x=4$，即票價為 $200-10\times 4=160$ 元時，收入最多

5. 已知二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，圖形以(2，3)為頂點，又通過點(3，1)，則數對$(a，b，c)=$__________。

【解答】$(-2，8，-5)$

【詳解】

$y=f(x)=ax^2+bx+c$

令 $f(x)=a(x-2)^2+3$ ……①，(3，1)代入① $\Rightarrow$ $a=-2$

$\therefore$ $f(x)=-2(x-2)^2+3=-2x^2+8x-5$，即數對$(a，b，c)=(-2，8，-5)$

6 .三次多項式 $f(x)$，若 $f(-1)=f(1)=f(2)=0$，且滿足 $f(5)=-72$，求 $f(x)=$__________。

【解答】$-(x-1)(x+1)(x-2)$

【詳解】

設 $f(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)$，$f(5)=a\times 4\times 6\times 3=-72$，$a=-1$

$\therefore$ $f(x)=-(x-1)(x+1)(x-2)$

7. 已知 $f$ 為 $N\to N$ 之函數且 $f(n)=\begin{cases} n+2 & ，n\le 5 \\ f(f(n-3)) & ，n\ge 6 \end{cases}$，則 $f(6)=$__________。

【解答】7

【詳解】$f(6)=f(f(3))=f(3+2)=f(5)=5+2=7$

8. 有一二次函數 $y=f(x)$滿足 $f(0)=2$，$f(1)=6$，$f(-1)=0$，則 $f(x)$之最小值為__________。

【解答】$-\dfrac{1}{4}$

【詳解】

令 $f(x)=(x+1)(ax+b)$ $\because$ $f(0)=2$ $\Rightarrow$ $b=2$

又 $f(1)=6$ $\Rightarrow$ $2(a+b)=6$ $\therefore$ $a+b=3$，故 $a=1$

故 $f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2=(x+\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{1}{4}\ge -\dfrac{1}{4}$，故 $f(x)$之 min 為 $-\dfrac{1}{4}$

9. 將 $y=x^2+2x+2$ 之圖形向右平移 2 單位，再向下平移 3 單位，若所得圖形之方程式為 $y=ax^2+bx+c$，則 $c=$__________。

【解答】$-1$

【詳解】$y=x^2+2x+2$ 向右平移 2 單位，向下平移 3 單位

$\Rightarrow$ $y+3=(x-2)^2+2(x-2)+2$ $\Rightarrow$ $y=x^2-2x-1$ $\Rightarrow$ $c=-1$

10.設 $k$ 爲實數，若二次函數 $f(x)=x^2-4x+(k+1)$，在 $0\le x\le 3$ 時，有最大値 2010，求 $k$ 之值爲__________。

【解答】2009

【詳解】$f(x)=x^2-4x+(k+1)$（$0\le x\le 3$）

$=(x-2)^2+(k-3)$

當 $x=0$ 時，有最大値 $k+1=2010 \quad\Rightarrow\quad k=2009$

11.$k\in R$，且不論 $x$ 爲任何實數，$kx^2+2x+k$ 恆爲負，求 $k$ 的範圍__________。

【解答】$k<-1$

【詳解】

$\forall x\in R$，$kx^2+2x+k$ 恆爲負 $\quad\Leftrightarrow\quad k<0$，$D<0$

$\Rightarrow\quad k<0$，$2^2-4k^2<0 \quad\Rightarrow\quad k<0$，$k^2-1>0$

$\Rightarrow\quad k<0$，$(k-1)(k+1)>0 \quad\Rightarrow\quad k<0$，$k>1$ 或 $k<-1 \quad\Rightarrow\quad k<-1$

12.將拋物線 $y=(x-1)^2$ 沿直線 $y=x$ 向東北方向移動，在第一次經過點 $A(4，9)$時，所得新拋物線方程式爲__________。

【解答】$y=(x-6)^2+5$

【詳解】

設 $y=(x-1)^2$ 向右平移 $k$ 單位，再向上平移 $k$ 單位時第一次經過 $A(4，9)$

即 $y\ -k=(x-1-k)^2$ ，過 $A(4，9)$，$k$ 取最小正值

$\therefore\quad 9\ -k=(4-1-k)^2 \Rightarrow k(k-5)=0 \quad\therefore\quad k=0$ 或 5，取最小正值 $k=5$

$\therefore\quad y=(x-1-5)^2+5$，即 $y=(x-6)^2+5$ 爲所求

13.線性函數 $y=f(x)$，滿足 $f(-4)=6$，$f(3)=-\dfrac{10}{3}$ ，則 $f(x)=$__________。

【解答】$-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

【詳解】設線性函數 $y=ax+b$（$a$，$b$ 爲常數）

由已知條件，$x=-4$ 時，$y=6$；$x=3$ 時，$y=-\dfrac{10}{3}$

$\therefore\quad -4a+b=6$ ……①；$3a+b=\ -\dfrac{10}{3}$ ……②

解①，②得 $a=-\dfrac{4}{3}$ ，$b=\ \dfrac{2}{3} \quad\therefore\quad y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

14.某班數學測驗，成績最低者爲 20 分，最高者爲 90 分。請你設計一線性函數，使原來 40 分者爲 60 分，原來 90 分者爲 100 分。則依函數，最低分者爲__________分。

【解答】44

【詳解】

設線性函數 $y=ax+b$（$a$，$b$ 爲常數）

由已知條件，$x = 40$ 時，$y = 60$；$x = 90$ 時，$y = 100$

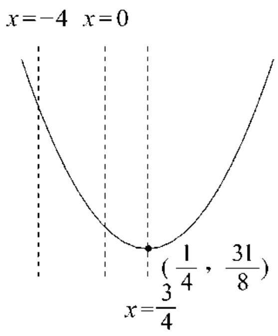
$\therefore\quad 40a + b = 60 \cdots\cdots$①；

$90a + b = 100 \cdots\cdots$②

解①，②得 $a = \dfrac{4}{5}$，$b = 28$ $\quad\therefore\quad y = f(x) = \dfrac{4}{5}x + 28$

於 $x = 20$ 時，$y = \dfrac{4}{5} \times 20 + 28 = 16 + 28 = 44$

15.若二次函數 $y = 2x^2 - x + 4$，當$-4 \le x \le 0$ 時，$y$ 之最大値爲 $M$，最小値爲 $m$，則 $M + m$ 之値爲__________。




【解答】44

【詳解】

$y = 2x^2 - x + 4 = 2(x^2 - \dfrac{1}{2}x) + 4 = 2(x - \dfrac{1}{4})^2 + 4 - 2 \cdot \dfrac{1}{16} = 2(x - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{31}{8}$

此拋物線頂點爲$(\dfrac{1}{4}，\dfrac{31}{8})$

$\Rightarrow$ 由圖知，當 $x = 0$ 時，有最小値 $m = 4$；

當 $x = -4$ 時，有最大値 $M$，$M = 2(-4)^2 - (-4) + 4 = 2 \cdot 16 + 4 + 4 = 40$

$\therefore\quad M + m = 44$

16.二次函數 $y = f(x)$圖形通過$(-2，3)$，$(-1，0)$，$(1，6)$三點，則

(1) $f(x) =$__________。 (2)對稱軸方程式爲__________。

【解答】(1) $2x^2 + 3x + 1$ (2) $x = -\dfrac{3}{4}$

【詳解】

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

過$(-2，3)$，$(-1，0)$，$(1，6)$三點，代入上式

$4a - 2b + c = 3 \cdots\cdots$①，

$a - b + c = 0 \cdots\cdots$②，

$a + b + c = 6 \cdots\cdots$③，

由①②③ $\Rightarrow$ $a = 2$，$a = 2, b = 3, c = 1$

$\therefore\quad f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 2(x + \dfrac{3}{4})^2 - \dfrac{1}{8}$，對稱軸 $x = -\dfrac{3}{4}$

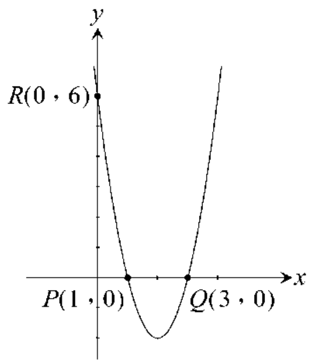
17.設二次函數 $y = ax^2 + bx + 6$ 在 $x = 2$ 時，有最小値$-2$，且此函數的圖形與 $x$ 軸交於 $P$，$Q$ 兩點，與 $y$ 軸交於 $R$ 點，試求此$\triangle PQR$ 的面積爲__________。

【解答】6

【詳解】

由題意，設 $f(x) = a(x-2)^2 - 2 = ax^2 - 4ax + (4a - 2)$

故 $ax^2 + bx + 6 = ax^2 - 4ax + (4a - 2)$




$\begin{cases} b = -4a \\ 6 = 4a - 2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y = 2x^2 - 8x + 6$

令 $y = 0$ $\Rightarrow$ $2x^2 - 8x + 6 = 0$ $\Rightarrow x = 1$，3，即 $P(1，0)$，$Q(3，0)$

令 $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = 6$，即 $R = (0，6)$，

則△$PQR$ 之面積$=\dfrac{1}{2}\ \overline{PQ}\times$高$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 6 = 6$

18.設 $f(x)$爲實係數多項式，已知 $f(2-3i) = 21-9i$，則將 $f(x)$除以 $x^2-4x+13$ 得餘式爲__。

【解答】$3x+15$

【詳解】

$x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm 3i$

設 $f(x) = (x^2 - 4x + 13)\, q(x) + ax + b,\ \ a, b \in R$

$f(2-3i) = 0\ \ + a(2-3i) + b =\ \ 21 - 9i$

$(2a+b) - 3a\,i = 21 - 9\,i \Rightarrow \begin{cases} 2a+b = 21 \\ -3a = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 15 \end{cases}$ 餘式爲 $3x+15$

19.$x \in R$，則 $f(x) = (x^2+2x+5)^2 + 2(x^2+2x+5) + 7$ 的最小值爲__________。

【解答】31

【詳解】

令 $k = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 \ge 4$

$f(x) = k^2 + 2k + 7 = (k+1)^2 + 6$

$\because$ $k \ge 4$ $\therefore$ $k+1 \ge 5 \Rightarrow (k+1)^2 \ge 25 \Rightarrow (k+1)^2 + 6 \ge 31$，即 $f(x) \ge 31$，$\therefore f(x)$最小值 31

20.$x \in R$，則函數 $g(x) = (x-1)^2 + 2(x-2)^2 + 3(x-3)^2 + \cdots + 10(x-10)^2$ 有最小值時，$x$ 之值爲__________。

【解答】7

【詳解】

$g(x) = (1+2+3+\cdots+10)x^2 - 2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)\,x + (1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$

$= 55x^2 - 2(\dfrac{10\times 11\times 21}{6})x + [\dfrac{10(11)}{2}]^2 = 55(x-7)^2 + 55^2 - 55\times 49 = 55(x-7)^2 + 330$

$\therefore$ 當 $x = 7$ 時，$g(x)$有最小值爲 330

【註】當 $x = 1，2，2，3，3，3，\cdots，\overbrace{10，10，\cdots，10}^{10個}$的算術平均數時，

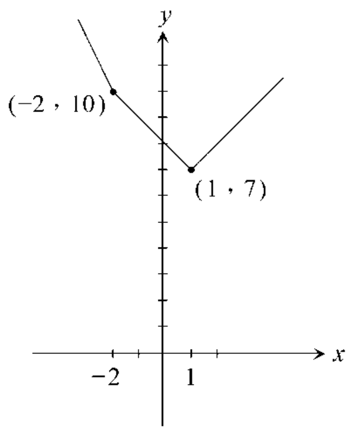
$\dfrac{1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + \cdots + 10\times 10}{1+2+3+\cdots+10} = \dfrac{10\times 11\times 21}{6}\times\dfrac{2}{10\times 11} = 7$，即當 $x = 7$ 時 $g(x)$有最小值

21.函數 $f(x) = |x-1| + |x+2| - x + 5$ 之最小值爲__________。

【解答】7

【詳解】

$f(x) = |x-1| + |x+2| - x + 5$，$x = 1$，$-2$ 分割數線爲 3 部分



① $x<-2$ 時，$f(x)=-(x-1)-(x+2)-x+5=-3x+4$

② $-2\le x\le 1$ 時，$f(x)=-(x-1)+(x+2)-x+5=-x+8$

③ $x>1$ 時，$f(x)=(x-1)+(x+2)-x+5=x+6$

圖形爲一折線，折點爲$(-2，10)$，$(1，7)$ ，$f(x)$的最小值爲 7

16、設 $x, y\in\mathbb{R}$ 且 $x^2+3y^2=6y$，則 $x^2+4y+1$的最大值爲__________，最小值爲__________。

【解答】$\dfrac{28}{3}; 1$

【詳解】$\because x^2=-3y^2+6y\ge 0\Rightarrow 3y(y-2)\le 0\Rightarrow 0\le y\le 2$

$$\begin{aligned}原式&=x^2+4y+1\\&=-3y^2+6y+4y+1\\&=-3(y-\frac{5}{3})^2+\frac{28}{3},0\le y\le 2\end{aligned}$$

$\therefore$最大值$=f(\dfrac{5}{3})=\dfrac{28}{3}$，最小值$=f(0)=1$。