

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.01.17				
範圍	第 19 回	班級		姓名
	3-3HCF、LCM(II)	座號		名

一、計算題 (每題 20 分)

1、試求 $f(x) = x^{49} + 2x^2 - 1$ 與 $g(x) = x^{47} + 2x^2 - 1$ 之最高公因式。

答案：最高公因式 $2x^2 - 3x - 2$ 、最低公倍式 $x(x-3)(2x^2 - 3x - 2)$

解析：去頭去尾法

$$\text{設 } f(x) = x^{49} + 2x^2 - 1, \quad g(x) = x^{47} + 2x^2 - 1$$

$$\text{最高公因式 } d(x) = (f(x), g(x)), \quad d(x) | f(x), d(x) | g(x) \Rightarrow d(x) | f(x) - x^2 g(x)$$

$$\Rightarrow d(x) | -2x^4 + 3x^2 - 1 \Rightarrow d(x) | (x-1)(x+1)(2x^2 - 1) \cdots \textcircled{1}$$

$$d(x) | f(x) - g(x) \Rightarrow d(x) | x^{47}(x^2 - 1), \quad \text{即 } d(x) | (x-1)(x+1) \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 最高公因式 } d(x) | (x-1)(x+1)$$

$$f(1) \neq 0, \quad f(-1) = 0, \quad g(-1) = 0 \Rightarrow d(x) = x + 1$$

2、求 $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 2$ 與 $g(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 6$ ，

$h(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2$ 之最高公因式。

答案：最高公因式 $x^2 - x + 2$

解析：從最低次數開始因式分解

$$g(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 6 = (x-1)(2x+3)(x^2 - x + 2)$$

$$\Rightarrow f(1) = 0, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) \neq 0, \quad (x^2 - x + 2) | f(x)$$

$$\Rightarrow h(1) \neq 0, \quad (x^2 - x + 2) | h(x)$$

最高公因式 $x^2 - x + 2$

3、試利用輾轉相除法求 $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 7x - 2$ ，與 $g(x) = 6x^5 - 7x^4 - 9x^3 + x^2 - 5x - 2$ 之最高公因式。

答案：最高公因式 $3x^2 - 5x - 2$

解析：

$$\begin{array}{r|rrrrrr|rrrrrr|l}
 -1 & 3 & -2 & -4 & -7 & -2 & 6 & -7 & -9 & +1 & -5 & -2 & 2 \\
 & 3 & -11 & +8 & +4 & & 6 & -4 & -8 & -14 & -4 & & \\
 -3 & & 9 & -12 & -11 & -2 & & -3 & -1 & +15 & -1 & -2 & -1 \\
 & & 9 & -33 & +24 & +12 & & -3 & +2 & +4 & +7 & +2 & \\
 \div 7 & & & 21 & -35 & -14 & & & -3 & +11 & -8 & -4 & -1 \\
 & & & 3 & -5 & -2 & & & -3 & +5 & +2 & & \\
 & & & & & & & & & +6 & -10 & -4 & 2 \\
 & & & & & & & & & +6 & -10 & -4 & \\
 & & & & & & & & & & & 0 &
 \end{array}$$

4、設 $f(x) = 6x^3 + 37x^2 + 41x - 18$ ，與 $g(x) = 15x^3 + 34x^2 + 5x - 6$ ，試求：

(1) $f(x), g(x)$ 之最高公因式 $d(x)$ 。

(2) 兩多項式 $m(x), n(x)$ ，使得 $d(x) = m(x) \cdot f(x) + n(x) \cdot g(x)$

答案：(1) 最高公因式 $3x^2 + 5x - 2$ (2) $m(x) = \frac{5}{39}$ ， $n(x) = -\frac{2}{39}$

解析：

$$\begin{array}{r|rrrr|rrrr}
 -2 & 6 & -37 & +41 & -18 & 15 & +34 & +5 & -6 & \\
 & 6 & +10 & -4 & & & & & & \times 2 \\
 \hline
 -9 & & +27 & +45 & -18 & 30 & +68 & +10 & -12 & 5 \\
 & & +27 & +45 & -18 & 30 & +185 & +205 & -90 & \\
 \hline
 & & & & 0 & & -117 & -195 & +78 & \div 39 \\
 & & & & & & -3 & -5 & +2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

(1) 最高公因式 $3x^2 + 5x - 2$

(2) $d(x) = 3x^2 + 5x - 2$

$$= -(-3x^2 - 5x + 2)$$

$$= -\frac{1}{39}(-117x^2 - 195x + 78)$$

$$= -\frac{1}{39}[(30x^3 + 68x^2 + 10x - 12) - 5(3x^3 + 37x^2 + 41x - 18)]$$

$$= -\frac{1}{39}[2g(x) - 5f(x)]$$

$$= \frac{5}{39}f(x) + \left(-\frac{2}{39}\right)g(x) \Rightarrow m(x) = \frac{5}{39}, n(x) = -\frac{2}{39}$$