

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.12.22				
範圍	3-1、2 多項式四則運	班級		姓名
	算、因式餘式定理	座號		

一、多重選擇題(每題 10 分)

1. 設  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  為整係數多項式,  $a_n \neq 0$ , 若  $f(x)$  有  $px - q$  的因式,  $p, q \in Z, p \neq 0, (p, q) = 1$  且  $p + q \neq 0, p - q \neq 0$ , 則

(A)  $p | a_n$  (B)  $p | a_0$  (C)  $q | a_0$  (D)  $p - q | f(1)$  (E)  $p + q | f(-1)$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】一次因式檢查法,  $p | a_n, q | a_0$

$\because f(x)$  有  $px - q$  因式, 設  $f(x) = (px - q) Q(x)$ ,  $Q(x)$  為整係數多項式

(1) 令  $x = 1 \therefore f(1) = (p - q) Q(1)$

$\because Q(1) \in Z, p - q \neq 0 \therefore p - q | f(1)$

(2) 令  $x = -1 \therefore f(-1) = [-(p + q)] Q(-1)$

$\because Q(-1) \in Z, p + q \neq 0 \therefore p + q | f(-1)$

2. 設  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 3x + 2$ , 下列何者為  $f(x)$  的因式?

(A)  $x - 2$  (B)  $x + 3$  (C)  $2x - 1$  (D)  $3x + 1$  (E)  $3x + 2$

【解答】(A)(D)

【詳解】利用綜合除法、及整係數一次因式檢查法

(A)  $f(2) = 0 \therefore x - 2 | f(x)$  (B)  $3 \nmid 2 \therefore x + 3 \nmid f(x)$  (C)  $2 \nmid 3 \therefore 2x - 1 \nmid f(x)$

(D)  $f(-\frac{1}{3}) = 0 \therefore 3x + 1 | f(x)$  (E)  $f(-\frac{2}{3}) \neq 0 \therefore 3x + 2 \nmid f(x)$

3.  $f(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 5, a, b, c \in N$ , 則下列何者不可能是  $f(x)$  的因式?

(A)  $x - 1$  (B)  $x + 1$  (C)  $2x - 1$  (D)  $x + 3$  (E)  $3x + 5$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

利用整係數一次因式檢驗法

若  $(px - q) | f(x)$ , 則  $p | 6, q | 5$ , 即  $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, q = \pm 1, \pm 5 \therefore (x + 3) \nmid f(x)$

又  $a, b, c \in N$ , 係數皆正無正根, 即  $f(\alpha) = 0$ , 則  $\alpha < 0$ , 可知  $(x - 1)$  及  $(2x - 1)$  均不可能

4. 設多項式  $f(x)$  除以  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$  之餘式為  $2x^2 + x - 7$ , 則

(A)  $f(x)$  除以  $x - 1$  的餘式為 4 (B)  $f(x)$  除以  $x - 2$  的餘式為 3

(C)  $f(x)$  除以  $x - 3$  的餘式為 14 (D)  $f(x)$  除以  $(x - 1)(x - 2)$  的餘式為  $7x - 11$

(E)  $f(x)$  除以  $(x - 2)(x - 3)$  的餘式為  $11x + 19$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】

設  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) Q(x) + 2x^2 + x - 7$

(A)  $f(x)$  除以  $x - 1$  的餘式  $= (x - 1)$  除  $2x^2 + x - 7$  之餘式  $= -4$

(B)  $f(x)$  除以  $x - 2$  的餘式  $= (x - 2)$  除  $2x^2 + x - 7$  之餘式  $= 3$

(C)  $f(x)$  除以  $x - 3$  的餘式  $= (x - 3)$  除  $2x^2 + x - 7$  之餘式  $= 14$

(D)  $f(x)$  除以  $(x - 1)(x - 2)$  的餘式  $= (x - 1)(x - 2)$  除  $2x^2 + x - 7$  之餘式  $= 7x - 11$

(E)  $f(x)$  除以  $(x - 2)(x - 3)$  的餘式  $= (x - 2)(x - 3)$  除  $2x^2 + x - 7$  之餘式  $= 11x - 19$

5. (1) 二次式  $ax^2 + bx - 4$  以  $x + 1$  除之得餘式為 3，以  $x - 1$  除之得餘式為 1，則

(A)  $a = 6$  (B)  $b = -6$  (C)  $b = -1$  (D)  $a + b = 5$  (E)  $a - b = 6$

(2) 承接上題，如以  $x - 2$  除之得餘式為 (A) 20 (B) 18 (C) 16 (D) 14 (E) 12

【解答】(1) (A)(C)(D) (2) (B)

【詳解】

(1) 設  $f(x) = ax^2 + bx - 4$ ，

$x + 1$  除之得餘式為 3，以  $x - 1$  除之得餘式為 1  $\Rightarrow f(-1) = 3, f(1) = 1$

則  $f(-1) = a - b - 4 = 3 \quad \therefore a - b = 7 \cdots \cdots \textcircled{1}$

又  $f(1) = a + b - 4 = 1 \quad \therefore a + b = 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$  解  $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$  得  $a = 6, b = -1$

(2) 以  $x - 2$  除  $f(x) = 6x^2 - x - 4$  之餘式為  $f(2) = 6 \times 4 - 2 - 4 = 18$

## 二、填充題(每題 10 分)

1. 設  $f(x) = x^4 + 7x^3 + 11x^2 - 3x - 18$ ，則  $f(f(1)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】-8

【詳解】

$f(1) = 1 + 7 + 11 - 3 - 18 = -2 \quad \therefore f(f(1)) = f(-2) = -8$

$$\begin{array}{r|l} 1 + 7 + 11 - 3 - 18 & -2 \\ -2 - 10 - 2 + 10 & \\ \hline 1 + 5 + 1 - 5, -8 & \end{array}$$

2. 化簡  $7^6 - 6(7^5) - 8(7^4) + 10(7^3) - 25(7^2) + 30(7) + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】19

【詳解】

設  $f(x) = x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 10x^3 - 25x^2 + 30x + 5$

$\therefore 7^6 - 6(7^5) - 8(7^4) + 10(7^3) - 25(7^2) + 30(7) + 5 = f(7)$

$= (x - 7 \text{ 除 } f(x) \text{ 之餘式})$

$\therefore \text{原式} = f(7) = 19$

$$\begin{array}{r|l} 1 - 6 - 8 + 10 - 25 + 30 + 5 & \\ + 7 + 7 - 7 + 21 - 28 + 14 & +7 \\ \hline 1 + 1 - 1 + 3 - 4 + 2 & +19 \end{array}$$

3. 多項式  $f(x)$  被  $x - 2$  除之餘式為 5，商  $Q(x)$  被  $x + 3$  除之餘式為 3，則  $f(x)$  被  $x + 3$  除的餘式為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】-10

【詳解】

$f(x) = (x - 2)Q(x) + 5$  被  $x + 3$  除的餘式為  $f(-3)$

又商  $Q(x)$  被  $x + 3$  除之餘式為 3  $\Rightarrow Q(-3) = 3$

$f(-3) = (-3 - 2)Q(-3) + 5 = (-5)(3) + 5 = -10$

4. 設  $f(x) = (x^2 - x + 1)q(x) + 2x - 5$ ，且  $f(x)$  之各項係數和為 2，則  $q(x)$  除以  $x - 1$  之餘式  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】5

【詳解】

$f(x) = (x^2 - x + 1)q(x) + 2x - 5$

$f(x)$ 之各項係數和為 2  $\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow q(1) + 2 - 5 = 2 \Rightarrow q(1) = 5$   
故  $q(x)$  除以  $x - 1$  之餘式為  $q(1) = 5$

5.  $\deg f(x) = 2$  且  $f(2007) = 1, f(2008) = 2, f(2009) = 7$ , 則  $f(2010) =$  \_\_\_\_\_。

【解答】 16

【詳解】

$$\text{設 } f(x) = a(x - 2007)(x - 2008) + b(x - 2007) + 1$$

$$f(2008) = b + 1 = 2, \quad b = 1,$$

$$f(2009) = 2a + 2b + 1 = 7, \quad a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x - 2007)(x - 2008) + (x - 2007) + 1, \text{ 則 } f(2010) = 2 \times 3 \times 2 + 3 + 1 = 16$$

6. 若三次多項式  $g(x)$  的  $g(-1) = g(0) = g(2) = 0, g(1) = 4$ , 試問

(1)  $g(x) =$  \_\_\_\_\_。

(2) 若多項式  $h(x) = x^4 - x^2 + 1$ , 則  $3g(x) - 4h(x)$  被  $x - 1$  除的餘式為 \_\_\_\_\_。

【解答】 (1)  $-2x(x+1)(x-2)$  (2) 8

【詳解】

(1) 由  $g(-1) = g(0) = g(2) = 0, \deg g(x) = 3$ , 可設  $g(x) = ax(x+1)(x-2)$

又  $g(1) = a \times 2 \times (-1) = 4 \Rightarrow a = -2$ , 故  $g(x) = -2x(x+1)(x-2)$

(2) 設  $F(x) = 3g(x) - 4h(x)$ , 所求餘式為  $F(1) = 3g(1) - 4h(1) = 3 \times 4 - 4 \times (1 - 1 + 1)$   
 $= 12 - 4 = 8$

7. 設  $f(x)$  為實係數多項式, 以  $x - 1$  除之, 餘式為 9; 以  $x - 2$  除之, 餘式為 16, 求  $f(x)$  除以  $(x - 1)(x - 2)$  的餘式為 \_\_\_\_\_。

【解答】  $7x + 2$

【詳解】

已知  $f(1) = 9, f(2) = 16$ , 設  $f(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + (ax + b)$

$$\begin{cases} f(1) = a + b = 9 \\ f(2) = 2a + b = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases} \therefore \text{餘式} = 7x + 2$$

8. 設多項式  $f(x)$  除以  $x - 1, x^2 - 2x + 3$  之餘式依次為 2,  $4x + 6$ , 則  $f(x)$  除以  $(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$  的餘式為 \_\_\_\_\_。

【解答】  $-4x^2 + 12x - 6$

【詳解】

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)h(x) + a(x^2 - 2x + 3) + 4x + 6$$

$$f(1) = 2a + 10 = 2 \Rightarrow a = -4, \therefore \text{餘式為 } -4(x^2 - 2x + 3) + 4x + 6 = -4x^2 + 12x - 6$$

9. 多項式  $f(x), f(x) \div (x - 3)$  之餘式為 2,  $f(x) \div (2x^2 + 5x - 3)$  之餘式為  $4x - 1$ , 則

(1)  $f(x) \div (2x^2 - 7x + 3)$  之餘式為 \_\_\_\_\_,

(2)  $f(x) \div (x - 3)(2x^2 + 5x - 3)$  之餘式為 \_\_\_\_\_。

【解答】  $\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$  ;  $-\frac{3}{5}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{10}$

【詳解】

$$(1) f(x) = (2x^2 + 5x - 3)q_1(x) + 4x - 1 = (2x - 1)(x + 3)q_1(x) + 4x - 1, \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 1$$

$$\text{又 } 2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$$

$$\therefore \text{設 } f(x) = (2x - 1)(x - 3)q_2(x) + a(x - 3) + 2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2} - 3\right) + 2 = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$\therefore f(x) \div (2x^2 - 7x + 3) \text{ 的餘式爲 } \frac{2}{5}(x - 3) + 2 = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$(2) \text{設 } f(x) = (x - 3)(2x^2 + 5x - 3)q_3(x) + b(2x^2 + 5x - 3) + 4x - 1$$

$$\therefore f(3) = 2 \Rightarrow b(2 \times 3^2 + 5 \times 3 - 3) + 4 \times 3 - 1 = 2 \Rightarrow 30b + 11 = 2 \therefore b = -\frac{3}{10}$$

$$\text{故 } f(x) \div (x - 3)(2x^2 + 5x - 3) \text{ 的餘式爲 } -\frac{3}{10}(2x^2 + 5x - 3) + 4x - 1 = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{10}$$

10. 多項式  $f(x) = x^{2000} + 3x^{90} - 5x^{18} + 7$  除以  $x^3 - 1$  之餘式爲\_\_\_\_\_。

【解答】  $x^2 + 5$

【詳解】

設  $f(x) = Q(x)(x^3 - 1) + r(x)$ ，當  $x^3 - 1 = 0$ ，即  $x^3 = 1$ ，可得餘式  $r(x)$

$$\therefore f(x) = (x^3)^{666}x^2 + 3(x^3)^{30} - 5(x^3)^6 + 7$$

$$\therefore f(x) \text{ 除以 } x^3 - 1 \text{ 之餘式爲 } 1^{666}x^2 + 3(1)^{30} - 5(1)^6 + 7 = x^2 + 5$$

11.  $x^{2010}$  除以  $x^4 - x^2$  之餘式爲\_\_\_\_\_。

【解答】  $x^2$

【詳解】

設  $f(x) = x^{2010}$ ，且  $f(x) = Q(x)(x^4 - x^2) + r(x)$

當  $x^4 - x^2 = 0$ ，即  $x^4 = x^2$ ，可得餘式  $r(x)$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x^4)^{502}x^2 = (x^2)^{502}x^2 = (x^4)^{251}x^2 = (x^2)^{251}x^2 = (x^4)^{125}x^2x^2 = (x^2)^{125}x^2 = (x^2)^{126} \\ &= (x^4)^{63} = (x^2)^{63} = (x^4)^{31}x^2 = (x^2)^{31}x^2 = (x^2)^{32} = (x^4)^{16} = (x^2)^{16} \\ &= (x^4)^8 = (x^2)^8 = (x^4)^4 = (x^2)^4 = (x^4)^2 = (x^2)^2 = x^4 = x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) \text{ 除以 } x^4 - x^2 \text{ 之餘式爲 } x^2$$

12. 若多項式  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  能被  $x - a$  及  $x + 2a$  整除，試求所有可能的實數  $a$  的值\_\_\_\_\_。

【解答】 1 或 -2

【詳解】  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$ ， $\therefore a = 1$  或  $-2$

13. 因式分解多項式  $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 4 =$ \_\_\_\_\_。

【解答】  $(x + 1)(x - 2)(3x^2 + x + 2)$

【詳解】

$$\text{令 } f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 4,$$

$$f(-1) = 3 + 2 - 5 + 4 - 4 = 0$$

$$f(2) = 3 \cdot 16 - 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1) | f(x) \text{ 且 } (x-2) | f(x) \Rightarrow (x+1)(x-2) = (x^2 - x - 2) | f(x)$$

$$\begin{array}{r|l} 3-2-5-4-4 & \\ +3+1+2 & +1 \\ \hline +6+2+4 & +2 \\ \hline 3+1+2 & +0+0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - x - 2)(3x^2 + x + 2) = (x+1)(x-2)(3x^2 + x + 2)$$

14. 設  $k$  為負整數, 若  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + kx - 3$  有整係數一次因式, 求  $k$  之值\_\_\_\_\_。

【解答】-11

【詳解】

設  $f(x)$  的整係數一次因式為  $ax - b$ , 則  $a | 1, b | -3$ , 則  $ax - b$  可為  $x \pm 1, x \pm 3$

$$(1) x+1 | f(x) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 1 - k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ (不合)}$$

$$(2) x-1 | f(x) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 1 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ (不合)}$$

$$(3) x+3 | f(x) \Rightarrow f(-3) = 0 \Rightarrow 81 + 54 + 9 - 3k - 3 = 0 \Rightarrow k = 47 \text{ (不合)}$$

$$(4) x-3 | f(x) \Rightarrow f(3) = 0 \Rightarrow 81 - 54 + 9 + 3k - 3 = 0 \Rightarrow k = -11$$

故  $k = -11$

15.  $a, b$  為常數, 若  $2x - 3$  與  $3x + 1$  均為  $ax^3 + bx^2 - 47x - 15$  的因式, 則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

【解答】(24, 2)

【詳解】

$$\text{令 } f(x) = ax^3 + bx^2 - 47x - 15$$

$$2x - 3 | f(x) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{27}{8}a + \frac{9}{4}b - \frac{141}{2} - 15 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 76 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3x + 1 | f(x) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{27}a + \frac{1}{9}b + \frac{47}{3} - 15 = 0 \Rightarrow -a + 3b = -18 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 3 \quad 11b = 76 - 54 = 22 \quad \therefore b = 2 \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } a = 24$$

16. 設  $a, b \in N, c \in Z$ , 若  $x^5 - ax^4 + x^3 - 2bx^2 + x + 2$  有一次因式  $x - c$ , 則  $a + b + c =$ \_\_\_\_\_。

【解答】4 或 5

【詳解】

$$\text{設 } f(x) = x^5 - ax^4 + x^3 - 2bx^2 + x + 2, x - c | f(x) \Rightarrow c | 2 \Rightarrow c = \pm 1, \pm 2$$

$c$	1	-1	2	-2
$f(c) = 0$	$a + 2b = 5$ $a = 1, b = 2$ 或 $a = 3, b = 1$	$a + 2b + 1 = 0$ (不合)	$4a + 2b = 11$ (不合)	$2a + b = -5$ (不合)

$$\therefore a + b + c = 4 \text{ 或 } 5$$

17. 設多項式  $f(x)$  次數不低於三次, 若以  $(x+2)^2, (x-1)^2$  除  $f(x)$  之餘式分別為  $5x - 3, 3x + 2$ , 則(1)以  $(x+2)(x-1)$  除  $f(x)$  之餘式為\_\_\_\_\_。

(2)以  $(x-1)^2(x+2)$  除  $f(x)$  之餘式為\_\_\_\_\_。

【解答】(1)  $6x - 1$  (2)  $-x^2 + 5x + 1$

【詳解】

由餘式定理可得  $f(-2) = 5 \cdot (-2) - 3 = -13$ ,  $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

(1) 設  $f(x) = (x+2)(x-1)q_1(x) + mx + n$

則  $f(-2) = -2m + n = -13$ ,  $f(1) = m + n = 5$ ,  $\therefore m = 6, n = -1$ , 所求餘式為  $6x - 1$

(2) 設  $f(x) = (x-1)^2(x+2)q_2(x) + a(x-1)^2 + 3x + 2$

則  $f(-2) = 9a - 6 + 2 = -13 \Rightarrow a = -1$ , 故所求餘式  $-(x-1)^2 + 3x + 2 = -x^2 + 5x + 1$

18. 將  $3x^3 - 8x^2 + 3x + 2$  分解成整係數一次質因式的連乘積為\_\_\_\_\_。

【解答】 $(x-1)(x-2)(3x+1)$

【詳解】

利用整係數一次因式檢驗法

設  $(px - q) | f(x)$ , 則  $p | 3, q | 2$ , 即  $p = \pm 1, \pm 3, q = \pm 1, \pm 2$

可能的  $\frac{q}{p} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$

$f(1) = 0$ , 即  $(x-1) | f(x)$ , 又  $f(2) = 0$ ,  $(x-2) | f(x)$ ,

依合除法  $\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(3x+1)$

19. 設  $a, b, c$  為常數, 多項式  $f(x)$  除以  $(x-a)(x-b)$ ,  $(x-b)(x-c)$ ,  $(x-c)(x-a)$  之餘式依次為  $5x+8, 3x+12, -3x$

(1) 求  $a, b, c$ 。(2)  $f(x)$  除以  $(x-a)(x-b)(x-c)$  之餘式為\_\_\_\_\_。

【解答】(1)  $a = -1, b = 2, c = -2$  (2)  $2x^2 + 3x + 4$

【詳解】

(1) 設  $f(x) = (x-a)(x-b)q_1(x) + 5x+8, \Rightarrow f(a) = 5a+8, f(b) = 5b+8 \dots\dots ①$

$f(x) = (x-b)(x-c)q_2(x) + 3x+12, \Rightarrow f(b) = 3b+12, f(c) = 3c+12 \dots\dots ②$

$f(x) = (x-c)(x-a)q_3(x) - 3x, \Rightarrow f(c) = -3c, f(a) = -3a \dots\dots ③$

(i) 由①③  $f(a) = 5a+8 = -3a \Rightarrow a = -1$

(ii) 由①②  $f(b) = 5b+8 = 3b+12 \Rightarrow b = 2$

(iii) 由②③  $f(c) = 3c+12 = -3c \Rightarrow c = -2$

(2)  $f(x)$  除以  $(x+1)(x-2), (x-2)(x+2), (x+2)(x+1)$  之餘式依次為  $5x+8, 3x+12, -3x$

即  $f(x) = (x+1)(x-2)q_1(x) + 5x+8$

$f(x) = (x-2)(x+2)q_2(x) + 3x+12$

$f(x) = (x+2)(x+1)q_3(x) - 3x$

設  $f(x) = (x+1)(x-2)(x+2)q_4(x) + \ell(x+2)(x+1) - 3x$

又  $f(2) = \ell \cdot 4 \cdot 3 - 6 = 5 \cdot 2 + 8 \Rightarrow \ell = 2$ , 所求餘式  $2(x+2)(x+1) - 3x = 2x^2 + x + 4$

20.  $a, b, c \in N$ , 若  $x+c$  整除  $x(x+a)(x+b)+7$ , 則  $a+b+c$  之值為\_\_\_\_\_。

【解答】11, 19 或 23

【詳解】

$\therefore x+c | x(x+a)(x+b)+7$

$$\therefore (-c)(-c+a)(-c+b)+7=0 \Rightarrow c(c-a)(c-b)=7,$$

$$\therefore c \in N \quad (1) c=1 \quad \therefore (1-a)(1-b)=7$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c|c|c} a-1 & 7 & 1 & -1 & -7 \\ \hline b-1 & 1 & 7 & -7 & -1 \end{array} \quad \therefore \begin{array}{c|c|c|c|c} a & 8 & 2 & 0 & -6 \\ \hline b & 2 & 8 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore a, b \in N \quad \therefore (a, b) = (8, 2) \text{ 或 } (2, 8) \Rightarrow a+b+c=11$$

$$(2) c=7 \quad \therefore (7-a)(7-b)=1$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c} a-7 & 1 & -1 \\ \hline b-7 & 1 & -1 \end{array} \quad \therefore \begin{array}{c|c|c} a & 8 & 6 \\ \hline b & 8 & 6 \end{array}$$

$$\therefore a+b+c=19 \text{ 或 } 23$$

21. 設  $x-5$  與  $x-7$  都是  $(x-6)^{50}+ax+b$  的因式, 其中  $a, b$  為常數, 則  $a+b$  之值為\_\_\_\_\_。

【解答】-1

【詳解】

設  $f(x) = (x-6)^{50} + ax + b$ , 由因式定理

$$x-5 | f(x) \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow (5-6)^{50} + 5a + b = 0 \Rightarrow 5a + b = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x-7 | f(x) \Rightarrow f(7) = 0 \Rightarrow (7-6)^{50} + 7a + b = 0 \Rightarrow 7a + b = -1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad 2a = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 代入 } \textcircled{1}, b = -1, \text{ 故 } a + b = -1$$

20.  $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$  可被  $(x-1)^2$  整除, 則

(1)  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。 (2) 商式為\_\_\_\_\_。

【解答】(1)  $(3, -4)$  (2)  $3x^2 + 2x + 1$

【詳解】

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} a+b \quad +0 \quad +0 \quad +1 \\ +2a \quad +(4a+2b) \quad +(6a+4b) \\ \hline -a \quad -(2a+b) \quad +(-3a-2b) \end{array} \left| \begin{array}{l} +2 \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 4a+3b=0 \\ -3a+2b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

$$a+(2a+b)+(3a+2b) \quad | \quad \underline{+(4a+3b)} \quad +(-3a-2b+1)$$

商式:  $3x^2 + 2x + 1$

21.  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4$  為整係數多項式, 若  $f(x)$  可分解成四個相異整係數一次因式的乘積, 則  $(a, b, c) =$ \_\_\_\_\_。

【解答】 $(0, -5, 0)$

【詳解】 $f(x)$  可分解成四個相異整係數一次因式的乘積

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow a=0, \quad b=-5, \quad c=0$$