高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：98.12.15					
範圍	3-1 多項式四則運算	班級		姓名	
		座號			

一、多重選擇題(每題 10 分)

1. 下列何者爲 x 的多項式？

(A) $x^2+\sqrt{2}\,x+\frac{1}{y}$　(B) $x^2+\sqrt{x}\ +2$　(C) $x^2y+\frac{x}{y}+\sqrt{y}+\sqrt{3}$　(D) $x^2+|x|+1$

(E) $\frac{1}{x+1}+2x+1$

【解答】(A)(C)

【詳解】x 的多項式需 x 的乘方是 0 或自然數

(B)中 $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，乘方 $\frac{1}{2}$ 非自然數　(D)中 $|x|$ 沒有次數

(E)中 $\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$ 非 x 之多項式

即 x 的多項式需 x 不在分母、根號、絕對值內

2. 設 $x^3+2x^2-1=a(x+1)(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$，則

(A) a，b，c，d 皆爲整數　(B) $a+b=5$　(C) $c=4$　(D) $b+d=6$　(E) $c+d=15$

【解答】(A)(B)(D)(E)

【解 1】

$x^3+2x^2-1=a(x+1)(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

令 $x=1$，得 $1+2-1=d \Rightarrow d=2$；令 $x=2$，得 $8+8-1=c+d=c+2 \Rightarrow c=13$

令 $x=-1$，得 $-1+2-1=b(-2)(-3)+(-2)c+d \Rightarrow 0=6b-26+2 \Rightarrow b=4$

令 $x=0$，得 $-1=1\cdot(-1)(-2)a+(-1)(-2)b+(-1)c+d$

$\Rightarrow -1=2a+8-13+2 \Rightarrow a=1$

3. 設多項式 $f(x)$除以 $2x-3$ 的商爲 $Q(x)$，餘式爲 r，則

(A) $f(x)$除以 $x-\frac{3}{2}$ 的商爲 $2Q(x)$，餘式 r　(B) $f(x)$除以 $5(2x-3)$的商爲 $\frac{Q(x)}{5}$，餘式爲 r

(C) $xf(x)$除以 $2x-3$ 的商爲 $xQ(x)$，餘式爲 r　(D) $f(\frac{x}{2})$除以 $x-3$ 的商爲 $Q(\frac{x}{2})$，餘式 r

(E) $f(3x)$除以 $2x-1$ 的商爲 $3Q(3x)$，餘式爲 r

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】

由 $f(x)=(2x-3)\cdot Q(x)+r$

(A) $f(x)=(x-\frac{3}{2})\cdot 2Q(x)+r$　，$\therefore$　$f(x)$除以 $x-\frac{3}{2}$ 之商爲 $2Q(x)$，餘式爲 r

(B) $f(x)=5(2x-3)\cdot\frac{Q(x)}{5}+r$，$\therefore$　$f(x)$除以 $5(2x-3)$之商爲 $\frac{Q(x)}{5}$，餘式爲 r

(C) $xf(x) = x(2x-3)\,Q(x) + rx = x(2x-3)\,Q(x) + \dfrac{r}{2}(2x-3) + \dfrac{3r}{2}$ (再除一次即得)

$\quad = (2x-3)\,[x\,Q(x) + \dfrac{r}{2}] + \dfrac{3r}{2}$

$$\begin{array}{r|l} & \dfrac{r}{2} \\ \hline 2x-3 & rx \\ & rx-\dfrac{3r}{2} \\ \hline & \dfrac{3r}{2} \end{array}$$

$\therefore\ xf(x)$除以 $2x-3$ 之商爲 $xQ(x) + \dfrac{r}{2}$，餘式爲 $\dfrac{3r}{2}$

(D) $f(\dfrac{x}{2}) = (x-3)\,Q(\dfrac{x}{2}) + r$ $\quad\therefore f(\dfrac{x}{2})$除以 $x-3$ 之商爲 $Q(\dfrac{x}{2})$，餘式爲 r

(E) $f(3x) = (6x-3)\,Q(3x) + r$ $\quad\therefore f(3x)$除以 $2x-1$ 之商爲 $3Q(3x)$，餘式 r

4. 設 a，$b \in R$，多項式 $f(x) = a(x^3 - x^2) + b(x^3 - x + 2) + x^2 + ax + 2$ 爲一次式，則
(A) $a = 0$ (B) $b = 0$ (C) $a + b = 0$ (D) $f(x)$之領導係數爲 2 (E) $f(x) = 2x + 4$

【解答】(C)(D)

【詳解】

即 $f(x) = (a+b)x^3 + (1-a)x^2 + (a-b)x + 2(b+1)$爲一次式

$\therefore\ a + b = 0$，$1 - a = 0$，$a - b \neq 0$ $\quad\therefore\ a = 1$，$b = -1$，（$a - b \neq 0$，合）

$\therefore\ f(x)$之領導係數爲 $a - b = 2$，$f(x) = 2x$

5. 設 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3 = a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e$，則
(A) $b = 2$ (B) $a = e$ (C) $c = d$ (D) $d = 6$ (E) $f(x)$除以$(x-1)^2$的餘式爲 $8x - 7$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

利用綜合除法

$$\begin{array}{l}
1\ -\ 2\ +\ 5\ +\ 0\ -\ 3 \mid 1 \\
\quad +\ 1\ -\ 1\ +\ 4\ +\ 4 \\ \hline
1\ -\ 1\ +\ 4\ +\ 4,+\ 1 \\
\quad +\ 1\ +\ 0\ +\ 4 \\ \hline
1\ +\ 0\ +\ 4,+\ 8 \\
\quad +\ 1\ +\ 1 \\ \hline
1\ +\ 1,+\ 5 \\
\quad +\ 1 \\ \hline
1,+\ 2
\end{array}$$

$a = 1$，$b = 2$，$c = 5$，$d = 8$，$e = 1$

$f(x) = (x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 8(x-1) + 1$，除以$(x-1)^2$的餘式 $8(x-1) + 1 = 8x - 7$

6. 設 $f(x) = (x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 2)\cdot(3x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$，則 $f(x)$的
(A) x^7 係數爲 -2 (B) x^9 係數爲 2 (C)各項係數和爲 -13
(D)各奇次項係數和爲 -9 (E)領導係數爲 3

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) x^7 係數爲 $2 + 2 - 1 + 4 - 9 = -2$

(B) x^9 係數為 $1+4-3=2$

(C) $f(x)$的各項係數和為 $=f(1)=(-1)\cdot 13=-13$

(D) $f(x)$的各奇次項係數和為 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{(-13)-(5)}{2}=-9$

(E) $f(x)$的領導係數 $=3x^{11}$ 的係數 $=3$

7. 設多項式 $f(x)$，$g(x)$的次數各為 m，n，即 $\deg f(x)=m$，$\deg g(x)=n$，m，n 為非負的整數，則(A) $\deg[f(x)+g(x)]=m$ 或 n (B) $\deg[f(x)\cdot g(x)]=m+n$ (C) $\deg f(g(x))=mn$ (D) $\deg[f(x)-g(x)]=m$ 或 n (E) $f(x)$除以 $g(x)$的商為 $m-n$ 次多項式

【解答】(B)(C)

【詳解】

(A)(D) $\deg[f(x)\pm g(x)]=$ 不一定，情形如下

(1) $m=n\Rightarrow$ $\deg[f(x)\pm g(x)]\le m$ 即不高於 m 可能更低

(2) $m\ne n\Rightarrow$ $\begin{cases} m，m>n \\ n，m<n \end{cases}=\max\{m，n\}=\dfrac{m+n+|m-n|}{2}$

(B) $\deg[f(x)\cdot g(x)]=\deg f(x)+\deg g(x)=m+n$

(C) $\deg f(g(x))=mn$

(E)當 $m\ge n$ 時，$f(x)$除以 $g(x)$的商為$(m-n)$次

當 $m<n$ 時，$f(x)$除以 $g(x)$的商為 0（無次數可言）

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 x^2-x+2 除 $x^4-x^3+x^2+ax+3$ 的餘式為 $2x+b$，a，$b\in R$，則數對$(a,b)=$ __________ 。

【解答】(3，5)

【詳解】

$\because$ x^2-x+2 除 $x^4-x^3+x^2+ax+3$ 的餘式為 $2x+b$

$$\begin{array}{r|l} & 1+0-1 \\ \hline 1-1+2 & 1-1+1+a \qquad +3 \\ & 1-1+2 \\ \hline & \quad 0-1+a \qquad +3 \\ & \qquad -1+1 \qquad -2 \\ \hline & \qquad\quad +(a-1)+5 \end{array}$$

$\therefore$ $a-1=2$ 且 $b=5$ $\therefore$ $a=3$，$b=5$

2. 多項式$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$展開後，按降冪排列為 $a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，求係數 a_7 的值為__________ 。

【解答】-36

【詳解】

$a_7=(-1)+(-2)+(-3)+\cdots+(-8)=-36$

3. 若 $b < -2$ 且 $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + ax + 10$ 可被 $x^2 + 2x - b$ 整除，則 $a + b =$__________。

【解答】-1

【詳解】

$$\begin{array}{lllll|l}
1+2+7 & +a & & +10 & & \\
\ -2+0 & -2(7+b) & & & & -2 \\
\quad\ +b & +0 & & +b(7+b) & & +b \\
\hline
1+0+(b+7) & +(a-2b-14) & & +(10+7b+b^2) & &
\end{array}$$

$$\begin{cases} a-2b-14=0 \\ 10+7b+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad (a，b) = (4，-5)，(10，-2)（不合），\therefore \quad a+b = 4-5 = -1$$

4. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (x-2)^4 - 2(x-2)^3 + 3(x-2)^2 - 2(x-2) + 1$，則 $d =$ ____。

【解答】-70

【詳解】變數變換

令$(x-2) = t \quad \Rightarrow \quad x = t + 2$

原式 $\Rightarrow \quad t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1 = a(t+2)^4 + b(t+2)^3 + c(t+2)^2 + d(t+2) + e$

$$\begin{array}{l}
1-2+\ 3-\ 2+\ 1 \ \underline{|-2} \\
\ \ -2+\ 8-22+48 \\
\hline
1-4+11-24+49 \longrightarrow e \\
\ \ -2+12-46 \ |-2 \\
\hline
1-6+23-70 \longrightarrow d
\end{array}$$

5. $f(x) = (x^5 - 2x^3 + x + 1)^{2009}$ 展式中之係數和為__________。

【解答】1

【詳解】

係數和為 $f(1) = (1^5 - 2 \cdot 1^3 + 1 + 1)^{2009} = 1 \quad \therefore \quad f(x)$的各項係數和為 1

6. 多項式 $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$的商式為 $x - 2$，餘式為 $2x - 5$，則 $f(x) =$__________。

【解答】$x^2 - 2x - 1$

【詳解】

$x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = f(x)(x-2) + 2x - 5$ 移項$\Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x - 2} = x^2 - 2x - 1$

7. 設多項式 $f(x)$除以 $x^3 - 1$ 之餘式為 $x^2 - 1$，則 $f(x)$除以 $x^2 + x + 1$ 之餘式為__________。

【解答】$-x-2$

【詳解】

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^3-1)\,q(x) + (x^2-1) = (x-1)(x^2+x+1)\,q(x) + x^2 - 1 \\
&= (x^2+x+1)\,[(x-1)\,q(x)] + (x^2+x+1) - x - 2 \\
&= (x^2+x+1)\,[(x-1)\,q(x) + 1] - x - 2 \quad \Rightarrow \quad 餘式 -x-2
\end{aligned}$$

8. 多項式 $f(x)=2x^5-13x^4-9x^3+11x^2+15x-17$ 除以 $x-7$ 之餘式__________。

【解答】-59

【詳解】由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 2 & -13 & -9 & +11 & +15 & -17 & \\ & +14 & +7 & -14 & -21 & -42 & +7 \\ \hline 2 & +1 & -2 & -3 & -6 & \underline{|-59} & \end{array}$$

知 $f(x)$除以 $x-7$ 之餘式爲-59

9. 以 x^2+2x+4 除$(x^2+3x+2)^4$之餘式爲__________。

【解答】$-72x-144$

【詳解】令 $p=x^2+2x+4 \quad\Rightarrow\quad x^2+3x+2=p+x-2$

$(x^2+3x+2)^4=[p+(x-2)]^4=p^4+4p^3(x-2)+6p^2(x-2)^2+4p(x-2)^3+(x-2)^4$

$=p[p^3+4p^2(x-2)+6p(x-2)^2+4(x-2)^3]+x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

$\Rightarrow x^4-8x^3+24x^2-32x+16=(x^2+2x+4)(x^2-10x+40)+(-72x-144)$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -8 & +24 & -32 & +16 & \\ & -2 & +20 & -80 & & -2 \\ & & -4 & +40 & -160 & -4 \\ \hline 1 & -10 & +40 & \underline{|-72} & \underline{-144} & \end{array}$$

所求餘式爲 $-72x-144$

10. k 爲整數，設 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+kx-1$，$g(x)=x^3+kx^2+2x+3$，若 $f(x)\cdot g(x)$之展式中所有偶次項係數和爲所有奇次項係數和的二倍，則 $k=$__________。

【解答】$k=3$

【詳解】

$\because\quad f(x)=x^4-3x^3+2x^2+kx-1$，$g(x)=x^3+kx^2+2x+3$

$\therefore\quad f(1)=k-1$，$f(-1)=-k+5$，$g(1)=k+6$，$g(-1)=k$

由 $\dfrac{f(1)g(1)+f(-1)g(-1)}{2}=2\times\dfrac{f(1)g(1)-f(-1)g(-1)}{2}$

$\Rightarrow\quad (k-1)(k+6)+(k+5)k=2[(k-1)(k+6)-(-k+5)k]$

$\Rightarrow\quad k^2+5k-6-k^2+5k=2(k^2+5k-6+k^2-5k)$

$\Rightarrow\quad 10k-6=2(2k^2-6)\quad\Rightarrow\quad 5k-3=2k^2-6$

$\Rightarrow\quad 2k^2-5k-3=0\quad\Rightarrow\quad (2k+1)(k-3)=0$

$\therefore\quad k=-\dfrac{1}{2}$ 或 3 $\quad\because\quad k\in Z\quad\therefore\quad k=3$

11. $(x-1)h(x)$被 x^2+x+1 除的餘式爲 $6x+3$，則多項式 $h(x)$被 x^2+x+1 除的餘式爲______。

【解答】$-3x$

【詳解】

設 $h(x)=(x^2+x+1)q(x)+ax+b$

$(x-1)h(x)=(x-1)(x^2+x+1)q(x)+(x-1)(ax+b)$

$=(x^2+x+1)(x-1)q(x)+[ax^2+(b-a)x-b]$

$=(x^2+x+1)(x-1)q(x)+[a(x^2+x+1)+(b-2a)x+(-a-b)]$(再除一次即得)

$=(x^2+x+1)[(x-1)q(x)+a]+(b-2a)x+(-a-b)$

$$\Rightarrow \quad (b-2a)x+(-a-b)=6x+3 \quad \therefore \begin{cases} b-2a=6 \\ -a-b=3 \end{cases} 得 \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases}，故餘式\ r(x)=ax+b=-3x$$

12. $f(x)=2x^3-5x^2-8x+a$，$g(x)=x^2-4x+b$，已知 $f(x)$是 $g(x)$的倍式，則 $a=$____，$b=$____。

【解答】6；2

【詳解】

$f(x)=2x^3-5x^2-8x+a$ 是 $g(x)=x^2-4x+b$ 的倍式，

即 $g(x)$整除 $f(x)$，用綜合除法

整除即餘式為 0，故 $4-2b=0$，$a-3b=0$ 得 $b=2$，$a=6$

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -5 & -8 & +a & \\ & +8 & +12 & & +4 \\ & & +2b & -3b & -b \\ \hline 2 & +3, & +(4-2b) & +(a-3b) & \end{array}$$

13. 設 $f(x)$以 $x-\dfrac{b}{a}$ 除之商為 $q(x)$，餘式為 r，則 $x\,f(x)+2$ 被$(ax-b)$除之商式為__________。

【解答】 $\dfrac{x}{a}q(x)+\dfrac{r}{a}$

【詳解】

$$f(x)=(x-\frac{b}{a})\,q(x)+r \quad \Rightarrow \quad x\,f(x)+2=(x-\frac{b}{a})\,xq(x)+xr+2$$

$$=(ax-b)\frac{x}{a}q(x)+(ax-b)\frac{r}{a}+\frac{br}{a}+2 \text{ (再除一次即得)}$$

$$=(ax-b)[\frac{x}{a}q(x)+\frac{r}{a}]+\frac{br}{a}+2$$

$\therefore$ $x\,f(x)+2$ 被$(ax-b)$除之商式為 $\dfrac{x}{a}q(x)+\dfrac{r}{a}$

14. 設$(x^5-3x^4+4x^3-2x^2+6)(2x^4+x^3-4x^2-3x+5)=a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$，則

(1) $a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0=$__________。

(2) $a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$ 之值 $=$__________。

(3) $a_9+a_7+a_5+a_3+a_1$ 之值 $=$__________。

【解答】(1) 6 (2) -7 (3) 13

【詳解】

$f(x)=(x^5-3x^4+4x^3-2x^2+6)(2x^4+x^3-4x^2-3x+5)=a_9x^9+a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$

則 $f(1)=a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0=(1-3+4-2+6)(2+1-4-3+5)=6$

$f(-1)=-a_9+a_8-a_7+a_6-\cdots-a_1+a_0$

$=(-1-3-4-2+6)(2-1-4+3+5)=(-4)\times 5=-20$

(1) $a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0=f(1)=(1-3+4-2+6)(2+1-4-3+5)=6$

(2) $a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dfrac{6-20}{2}=-7$

(3) $a_9+a_7+a_5+a_3+a_1=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{6+20}{2}=13$

15.多項式 $f(x)$滿足 $8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，則 $f(x)$的常數項為__________。

【解答】-3

【詳解】

$f(x)$的常數項為$f(0)$，由$8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，

令$x=0$　∴　$8f(0)-0-2f(0)+18=0$　∴　$f(0)=-3$

16. 若x^3+3x^2+mx+2可被x^2+nx+1整除，則$(m，n)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(3，1)$

【詳解】

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 1+2 & & & \\ \cline{2-5}
1+n+1 & 1+3 & +m & & +2 \\
 & 1+n & +1 & & \\ \cline{2-5}
 & & (3-n)+(m-1) & & +2 \\
 & & 2+ & 2n & +2 \\ \cline{2-5}
 & & (1-n)+(m-2n-1) & & +0
\end{array}
$$

∵　整除，則$\begin{cases}1-n=0\\m-2n-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3\\n=1\end{cases}$，故數對$(m，n)=(3，1)$