高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：98.12.22					
範圍	3-1、2 多項式四則運算、因式餘式定理	班級		姓名	
		座號			

一、多重選擇題(每題 10 分)

1. 設 $f(x)=x^3-5x^2+6x+2=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，$a$，$b$，$c$，$d$ 爲常數，則下列各選項哪些是正確的？

(A) $a+b+c+d=0$　(B) $f(x)$的值恆不小於 2　(C) $f(2-\sqrt{3})=5+\sqrt{3}$

(D) $f(2+i)=1-3i$　(E)以四捨五入法求 $f(1.97)$之近似值至小數點後第三位爲 2.061

【解答】(D)(E)

【詳解】

$$
\begin{array}{l}
1-5+6+2 \;\underline{\big|\,2} \\
\underline{\;\;+2-6+0\;\;} \\
1-3+0,+2 \to d \\
\underline{\;\;+2-2\;\;} \\
1-1,-2 \to c \\
\underline{\;\;+2\;\;} \\
1,+1 \to b \\
\hookrightarrow a
\end{array}
$$

根據綜合除法之計算得 $f(x)=(x-2)^3+(x-2)^2-2(x-2)+2$

(A)$a+b+c+d=1+1+(-2)+2=2$

(B)$f(-1)=-10<2$

(C)$f(2-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3+(-\sqrt{3})^2-2(-\sqrt{3})+2=5-\sqrt{3}$

(D)$f(2+i)=i^3+i^2-2i+2=1-3i$

(E)$f(1.97)=2-2(-0.03)+(-0.03)^2+(-0.03)^3$

$=2+0.06+0.0009-0.000027=2.060873 \fallingdotseq 20.61$

2. 不論 x 爲任何實數值，$\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2x+1}$之值恆爲一定數 k，則

(A) $k=\dfrac{1}{3}$　(B) $a=\dfrac{1}{3}$　(C) $b=\dfrac{2}{3}$　(D) $b=3$　(E) $a+b=1$

【解答】(A)(E)

【解析】

$\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2x+1}=k$ 恆成立　$\Rightarrow$　$x^2+ax+b=k(3x^2+2x+1)=3kx^2+2kx+k$

比較係數得 $1=3k$，$a=2k$，$b=k$　$\therefore$　$k=\dfrac{1}{3}$，$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$

3. 設多項式 $f(x)$被 $ax-b$（$a\neq 0$）除之商爲 $q(x)$，餘式爲 r，下列何者爲真？

(A)以 $x-\dfrac{b}{a}$除 $f(x)$之餘式爲 ar

(B) $f(bx)$被 $ax-1$ 除之餘式爲 r

(C) $f(bx)$被 $ax-1$ 除之商爲 $bq(x)$

(D) $a\,f(x)$被 $x-\dfrac{b}{a}$ 除之餘式爲 ar

(E) $x\,f(x)$被 $x-\dfrac{b}{a}$ 除之餘式爲 $\dfrac{br}{a}$

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】

由已知 $f(x)=(ax-b)\,q(x)+r$

(A) $f(x)=(x-\dfrac{b}{a})\cdot aq(x)+r$，商爲 $aq(x)$，餘式 r

(B) $f(bx)=(abx-b)q(bx)+r=(ax-1)\cdot bq(bx)+r$，商爲 $bq(bx)$，餘式 r

(C)商爲 $bq(bx)$，非 $bq(x)$

(D) $a\,f(x)=(ax-b)\,aq(x)+ar=(x-\dfrac{b}{a})\,a^2\,q(x)+ar$，商爲 $a^2\,q(x)$，餘式 ar

(E) $x\,f(x)=(ax-b)\cdot xq(x)+rx=(x-\dfrac{b}{a})\cdot axq(x)+r\,(x-\dfrac{b}{a})+\dfrac{br}{a}$

$=(x-\dfrac{b}{a})[axq(x)+r]+\dfrac{br}{a}$　　商爲 $ax\,q(x)+r$，餘式 $\dfrac{br}{a}$

4. 下列何者爲 $3x^5-x^4-6x^3+11x^2-9x+2$ 的因式？

(A) $x+1$　(B) $x+2$　(C) $x-2$　(D) $3x-1$　(E) $3x-2$

【解答】(B)(D)

【詳解】

$f(x)=3x^5-x^4-6x^3+11x^2-9x+2$ 的整係數一次因式可能爲 $x\pm1$，$x\pm2$，$3x\pm1$，$3x\pm2$

利用綜合除法除之如下

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
3 & -1 & -6 & +11 & -9 & +2 & |\;1 \\
 & +3 & +2 & -4 & +7 & -2 & \\
\hline
3 & +2 & -4 & +7 & -2, & +0 & \\
 & -6 & +8 & -8 & +2 & & |\;-2 \\
\hline
3 & -4 & +4 & -1, & +0 & & \\
 & +1 & -1 & +1 & & & |\;\frac{1}{3} \\
\hline
3 & -3 & +3, & +0 & & &
\end{array}
$$

$3x^2-3x+3$ 沒有實係數一次因式（因判別式<0）

故 $f(x)$之整係數一次因式爲 $x-1$，$x+2$，$3x-1$

5. 設 a，$b\in R$，若多項式 $f(x)=(x-6)^{30}+ax+b$ 有 $x-5$ 與 $x-7$ 兩個因式，則

(A) $a=0$　(B) $b=-1$　(C) $x-6$ 除 $f(x)$之餘式爲 -1　(D) $x-4$ 除 $f(x)$之餘式爲 1027

(E) $x-8$ 除 $f(x)$之餘式爲 $f(4)$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(1) $f(x)$有 $x-5$，$x-7$ 兩個因式　　$\therefore$　$f(5)=0$，$f(7)=0$

$\therefore\quad 5a+b+1=0$，$7a+b+1=0\quad\therefore\quad a=0$，$b=-1$

(2)$\therefore\quad x-6$ 除 $f(x)$餘式為 $f(6)=6a+b=-1$

$x-4$ 除 $f(x)$餘式為 $f(4)=2^{30}+4a+b=2^{30}-1\neq 1027$

$x-8$ 除 $f(x)$餘式為 $f(8)=2^{30}+8a+b=2^{30}-1=f(4)$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $f(x)=351x^5-692x^4-23x^3+9x^2-36x+50$，則 $f(2)=$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】-10

【詳解】

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 351 & -692 & -23 & +9 & -36 & +50 & 2 \\ & +702 & +20 & -6 & +6 & -60 & \\ \hline 351 & +10 & -3 & +3 & -30 & -10 & \end{array}$$

由上綜合除法可知：餘式 $r=f(2)=-10$

2. $f(x)=x^6-5x^5+4x^4-50x^3+49x^2+110x-107$，則 $f(f(1))=$＿＿＿＿＿ 。

【解答】-123

【詳解】

由綜合除法知 $f(1)=2\quad\therefore\quad f(f(1))=f(2)=-123$

3. 已知 $f(x)=(x^2+1)(x^{10}+1)+x-1$，則

(1) $f(x)$除以 $x+1$ 得餘式為＿＿＿＿＿ 。 (2) $(x+1)f(x)$除以 x^2+1 得商式為＿＿＿＿＿ 。

【解答】(1) 2 (2) $x^{11}+x^{10}+x+2$

【詳解】

(1)所求 $=f(-1)=[(-1)^2+1][(-1)^{10}+1]-1-1=2\cdot 2-1-1=2$

(2) $(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^{10}+1)+(x+1)(x-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x^{10}+1)+(x^2+1)-2=(x^2+1)[(x+1)(x^{10}+1)+1]-2$

得商式為$(x+1)(x^{10}+1)+1=x^{11}+x^{10}+x+2$

4. 設多項式 $f(x)$除以 x^3-1 之餘式為 x^2-1，則 $f(x)$除以 x^2+x+1 之餘式為＿＿＿＿＿ 。

【解答】$-x-2$

【詳解】

$f(x)=(x^3-1)\,q(x)+(x^2-1)=(x-1)(x^2+x+1)\,q(x)+x^2-1$

$=(x^2+x+1)\,[(x-1)\,q(x)]+(x^2+x+1)-x-2=(x^2+x+1)\,[(x-1)\,q(x)+1]-x-2$

$\Rightarrow$ 餘式$-x-2$

5. $7^5-6\times 7^4-4\times 7^3-26\times 7^2+33\times 7+21=$＿＿＿＿＿ 。

【解答】7

【詳解】

令 $f(x)=x^5-6x^4-4x^3-26x^2+33x+21$，所求 $=f(7)$，即 $f(x)\div(x-7)$ 之餘式

由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -6 & -4 & -26 & +33 & +21 & 7 \\ & +7 & +7 & +21 & -35 & -14 & \\ \hline 1 & +1 & +3 & -5 & -2, & +7 & \end{array}$$

$\therefore\quad f(7)=7$

6. 設 $g(x)=16x^4-8x^3-28x^2+16x+5=a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$，則

(1)序組(a，b，c，d，e) = ＿＿＿＿＿。

(2) $g(0.499)=$ ＿＿＿＿＿。（求近似值到小數第三位，第四位四捨五入）

【解答】(1) (1，3，－4，－5，6)　(2) 6.010

【詳解】

(1)

$$
\begin{array}{l}
\quad 16-8-28+16+5 \;\big|\; \frac{1}{2} \\
\qquad\; +8+\;\;0-14+1 \\
2\,\big|\,16+0-28+\;\;2+6 \longrightarrow e \\
\qquad 8+0-14+\;\;1 \\
\qquad\; +4+\;\;2-\;\;6 \\
2\,\big|\,8+4-12-\;\;5 \longrightarrow d \\
\qquad 4+2-6 \\
\qquad\; +2+2 \\
2\,\big|\,4+4-4 \longrightarrow c \\
\qquad 2+2 \\
\qquad\; +1 \\
2\,\big|\,2+3 \longrightarrow b \\
\qquad 1 \longrightarrow a
\end{array}
$$

得序組(a，b，c，d，e) = (1，3，－4，－5，6)

(2)由(1)，$g(x)=(2x-1)^4+3(2x-1)^3-4(2x-1)^2-5(2x-1)+6$

則 $g(0.499)=6-5\times(-0.002)-4(-0.002)^2+\cdots=6.009984\cdots\fallingdotseq 6.010$

7. 設 $x^4=(x+k)(x-1)(x+2)(x-2)+a(x-1)(x+2)+b(x-1)+c$，則 $a+b+c+k=$＿＿＿。

【解答】2

【詳解】

令 $x=1 \Rightarrow 1=c$；

$x=-2 \Rightarrow 16=-3b+1 \quad \therefore \quad b=-5$

$x=2 \Rightarrow 16=4a-5+1 \quad \therefore \quad a=5$；

$x=0 \Rightarrow 0=4k-10+5+1 \quad \therefore \quad k=1$

則 $a+b+c+k=2$

8. 設 $f(x)=(-x^3+x+2)^9$

(1) $f(x)$的常數項爲＿＿＿＿＿。　(2) $f(x)$的各項係數和爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 512　(2) 512

【詳解】

(1) $f(x)$的常數項爲 $f(0)=(-0+0+2)^9=512$

(2) $f(x)$的各項係數和爲 $f(1)=(-1+1+2)^9=512$

9. 設二多項式 $f(x)$，$g(x)$其次數均大於 2，已知 $f(x)$與 $g(x)$除以 x^2-x-1 之餘式分別爲 $2x+1$ 與 $x-3$，則

(1) $f(x)+g(x)$除以 x^2-x-1 之餘式爲＿＿＿＿＿。

(2) $2f(x)-3g(x)$除以 x^2-x-1 之餘式爲＿＿＿＿＿。

(3) $f(x)\cdot g(x)$除以 x^2-x-1 之餘式爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $3x-2$　(2) $x+11$　(3) $-3x-1$

【詳解】

由除法定理，令 $f(x) = (x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 2x + 1$，$g(x) = (x^2 - x - 1)\, q_2(x) + x - 3$

(1) $f(x) + g(x) = (x^2 - x - 1)[\, q_1(x) + q_2(x)] + (2x + 1) + (x - 3)$

$= (x^2 - x - 1)[\, q_1(x) + q_2(x)] + 3x - 2$

$\therefore$ $f(x) + g(x)$除以 $x^2 - x - 1$ 的餘式爲 $3x - 2$

(2) $2f(x) - 3g(x) = [\, 2(x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 4x + 2] - [\, 3(x^2 - x - 1)\, q_2(x) + 3x - 9]$

$= (x^2 - x - 1)\, [\, 2q_1(x) - 3q_2(x)\,] + x + 11$

$\therefore$ $2f(x) - 3g(x)$除以 $x^2 - x - 1$ 的餘式爲 $x + 11$

(3) $f(x)\, g(x) = [(x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 2x + 1]\, [(x^2 - x - 1)\, q_2(x) + x - 3]$

$= (x^2 - x - 1)^2\, q_1(x)\, q_2(x) + (x^2 - x - 1)(x - 3)\, q_1(x) + (x^2 - x - 1)(2x + 1)\, q_2(x) + (2x + 1)(x - 3)$

$= (x^2 - x - 1)\, Q(x) + (2x + 1)(x - 3) = (x^2 - x - 1)\, Q(x) + 2(x^2 - x - 1) - 3x - 1$

$= (x^2 - x - 1)\, [Q(x) + 2\,] - 3x - 1$

$\therefore$ $f(x)\, g(x)$除以 $x^2 - x - 1$ 的餘式爲$- 3x - 1$

10. 設 $\deg f(x) = 3$，$f(2) = f(-1) = f(4) = 3$，$f(1) = -9$，則 $f(0) =$__________。

【解答】-13

【詳解】

$\deg f(x) = 3$，$f(2) = f(-1) = f(4) = 3$

則 $f(x) - 3 = a\,(x - 2)(x + 1)(x - 4)$，即 $f(x) = a\,(x - 2)(x + 1)(x - 4) + 3$

$x = 1$ 代入 $\Rightarrow$ $f(1) = a \times (-1) \times 2 \times (-3) + 3 = -9$ $\Rightarrow$ $a = -2$

得 $f(x) = -2(x + 2)(x + 1)(x - 4) + 3$，故 $f(0) = -2 \times (-2) \times 1 \times (-4) + 3 = -13$

11. 設 $f(x)$爲實係數多項式，以 $x - 1$ 除之，餘式爲 9；以 $x - 2$ 除之，餘式爲 16，求 $f(x)$除以$(x - 1)(x - 2)$的餘式爲__________。

【解答】$7x + 2$

【詳解】

已知 $f(1) = 9$，$f(2) = 16$，設 $f(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + (ax + b)$

$\begin{cases} f(1) = a + b = 9 \\ f(2) = 2a + b = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases}$ $\therefore$ 餘式 $= 7x + 2$

12.用 $x - 1$ 除$(x - 2)^{2009} + 2009$ 所得的餘式爲__________。

【解答】2008

【詳解】

令 $f(x) = (x - 2)^{2009} + 2009$ 由餘式定理 $\Rightarrow$ 餘式 $r = f(1) = (1 - 2)^{2009} + 2009 = 2008$

13.設多項式 $f(x)$除以 $x - 1$，$x^2 - 2x + 3$ 之餘式依次爲 2，$4x + 6$，則 $f(x)$除以$(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$的餘式爲__________。

【解答】$-4x^2 + 12x - 6$

【詳解】

$f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)\, h(x) + a(x^2 - 2x + 3) + 4x + 6$

$f(1) = 2a + 10 = 2$ $\Rightarrow$ $a = -4$，$\therefore$ 餘式爲 $-4x^2 + 12x - 6$

14.設多項式 $f(x)=(a-2)x^2+(b+3)x+c$ 且 $f(-1)=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{3})=1$，則 $a+b+c$ 之值

爲__________。

【解答】0

【詳解】

$\because\ f(-1)=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{3})=1$，且 $\deg f(x)\le 2$，$\therefore f(x)=1$

$\Rightarrow\ a-2=0$，$b+3=0$，$c=1\ \Rightarrow\ a=2$，$b=-3$，$c=1\ \Rightarrow\ a+b+c=0$

15.多項式 $f(x)$被 $x-2$ 除之餘式爲 5，商 $Q(x)$被 $x+3$ 除之餘式爲 3，則 $f(x)$被 $x+3$ 除的餘式爲__________。

【解答】-10

【詳解】

$f(x)=(x-2)\,Q(x)+5$ 被 $x+3$ 除的餘式爲

$f(-3)=(-3-2)\,Q(-3)+5=(-5)(3)+5=-10$

16.a，b 爲常數，若 $2x-3$ 與 $3x+1$ 均爲 $ax^3+bx^2-47x-15$ 的因式，則數對$(a，b)=$________。

【解答】(24，2)

【詳解】

令 $f(x)=ax^3+bx^2-47x-15$

$2x-3\mid f(x)\ \Rightarrow\ f(\frac{3}{2})=0\ \Rightarrow\ \frac{27}{8}a+\frac{9}{4}b-\frac{141}{2}-15=0\ \Rightarrow\ 3a+2b=76$……①

$3x+1\mid f(x)\ \Rightarrow\ f(\frac{-1}{3})=0\ \Rightarrow\ -\frac{1}{27}a+\frac{1}{9}b+\frac{47}{3}-15=0\ \Rightarrow\ -a+3b=-18$……②

① + ② $\times 3$ $\quad 11b=76-54=22\ \ \therefore\ \ b=2$ 代入②得 $a=24$

17.多項式 $f(x)=x^{2000}+3x^{90}-5x^{18}+7$ 除以 x^3-1 之餘式爲__________。

【解答】x^2+5

【詳解】

設 $f(x)=Q(x)(x^3-1)+r(x)$，令 $x^3-1=0$，即令 $x^3=1$，可由 $f(x)$求得餘式 $r(x)$

$\because\ f(x)=(x^3)^{666}x^2+3(x^3)^{30}-5(x^3)^6+7$

$\therefore\ f(x)$除以 x^3-1 之餘式爲 $1^{666}x^2+3(1)^{30}-5(1)^6+7=x^2+5$

18.設 $f(x)=x^4+3x^2-2x-1$ 且 $g(x)=f(2x-3)$，則以 $2x-1$ 除 $g(x)$所得之餘式爲________。

【解答】31

【詳解】

$f(x)=x^4+3x^2-2x-1$，$g(x)=f(2x-3)$，以 $2x-1$ 除 $g(x)$所得之餘式爲

$g(\frac{1}{2})=f(2\times\frac{1}{2}-3)=f(-2)=(-2)^4+3(-2)^2-2(-2)-1=31$