高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.11.25					
範圍	2-3 數學歸納法	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1. 將正奇數依下法分群：(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，⋯，則第 n 群（有 n 個正奇數）的首項爲(A) $2n+1$ (B) $2n+3$ (C) n^2-n+1 (D) n^2+n+1 (E) $4n-1$

【解答】(C)

【詳解】

第 1 群到第 $n-1$ 群，各有 1，2，3，⋯，$n-1$ 個元素 ∴ 共有 $\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$ 個元素

∵ 各群元素由小而大爲 1，3，5，7，⋯等正奇數

∴ 第 $n-1$ 群的最後一項，即第 $\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$ 個奇數 $2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-1=n^2-n-1$

∴ 第 n 群的首項爲$(n^2-n-1)+2=n^2-n+1$

2. 設平面上的 n 條直線最多可把平面分割成 a_n 個區域，則下列何者正確？

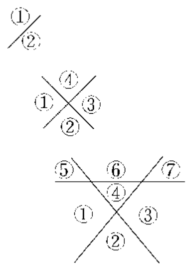
(A) $a_3=6$ (B) $a_5=15$ (C) $a_n=a_{n-1}+n$ (D) $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

【解答】(C)

【詳解】

一條直線把平面分割成 2 個區域 ∴ $a_1=2$

當 n 條直線把平面分割成 a_n 個區域時，若再加一條直線，則這直線和原來 n 條直線各有一個交點，共得 n 個交點，這 n 個交點把新加的直線分成 $n+1$ 段，每一段表一個區域被這段分成兩個區域，所以新加這條直線，則增加 $n+1$ 個區域，故 $a_n=a_{n-1}+n$



即 $a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

$\vdots$

+) $a_n=a_{n-1}+n$

$a_n=a_1+2+3+4+\cdots+n$

$a_n=2+2+3+4+\cdots+n=2+\frac{(2+n)(n-1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$

(A) $a_3=\frac{3^2+3+2}{2}=7\neq 6$， (B) $a_5=\frac{5^2+5+2}{2}=16\neq 15$，

(C) $a_n=a_{n-1}+n$，正確 (D) $a_n=\frac{n^2+n+2}{2}\neq\frac{n(n+1)}{2}$ ，

3. 設 $f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$，$n\in N$，已知 $f(n)$恆爲質數 p 的倍數，$\forall n\in N$，則 $p=$

(A)2 (B)3 (C)5 (D)7 (E)11

【解答】(D)
【詳解】

$f(1)=3^3+2^3=35=5\times 7$，$f(2)=3^5+2^4=259=7\times 37$ $\Leftrightarrow$ 質數 $p=7$

二、多重選擇題(每題 10 分)

1. $n\in N$，$f(n)=n^2+n+41$，則下列何者爲質數？

(A) $f(1)$ (B) $f(2)$ (C) $f(3)$ (D) $f(40)$ (E) $f(41)$

【解答】(A)(B)(C)
【詳解】

(A) $f(1)=43$ 是質數 (B) $f(2)=47$ 是質數 (C) $f(3)=53$ 是質數

(D) $f(40)=40^2+40+41=40(41)+41=41^2$ 不是質數

(E) $f(41)=41^2+41+41=41\times 43$ 不是質數

2. 對於等式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$，$n\in N$ 而言，下列敘述何者正確？

(A)當 $n=1$ 時，該等式成立 (B)當 $n=2$ 時，該等式成立

(C)由 $n=k$ 時該等式成立，可導出 $n=k+1$ 時亦成立 (D)當 $n=9999$ 時，該等式亦成立

(E)$\forall n\in N$，該等式都成立

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)
【解 1】

$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$爲等差級數，共 $n+1$ 項

$\therefore$ $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=\frac{1}{2}(n+1)[1+(2n+1)]=(n+1)^2$，$\forall n\in N$

三、填充題(每題 10 分)

1. 已知一數列$\langle a_n\rangle$定義爲 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n$，則 $a_n=$__________。

【解答】n^2-n+1
【詳解】

已知關係式 $a_{k+1}=a_k+2k$，$k\in N$，分別將 k 以 1，2，3，…，$(n-1)$代入上式，得

$a_2=a_1+2$，

$a_3=a_2+4$，

$a_4=a_3+6$，

$\cdots$ ，

$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，$n\ge 2$

各式相加，得 $a_n=a_1+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=1+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$，$n\ge 2$

$\therefore$ $a_n=n^2-n+1$，$n\ge 2$……(※)

但是 $n=1$ 代入(※)也成立，故此數列的第 n 項 $a_n=n^2-n+1$，對於任意自然數 n 都成立

2. 平面上有 n 個圓經過同一定點，這 n 個圓最多把所在的平面分成 a_n 個部分，顯然 $a_1=2$，

$a_2 = 4$，則 $a_3 =$__________，又 $a_n =$__________。

【解答】$a_3 = 7$；$a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

【詳解】

因爲 $a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 7$，$a_4 = 11$，⋯，故 $a_n = a_{n-1} + n$

即

$$
\begin{array}{rl}
 & a_2 = a_1 + 2 \\
 & a_3 = a_2 + 3 \\
 & a_4 = a_3 + 4 \\
 & \vdots \\
+) & a_n = a_{n-1} + n \\
\hline
 & a_n = a_1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n
\end{array}
$$

又 $a_1 = 2$，$a_n = 2 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \dfrac{1}{2}n(n+1) = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

3. 數列< a_n >定義爲 $a_1 = 1$，$n \in N$ 時，$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$，a_{20} 之值爲__________。

【解答】400

【詳解】

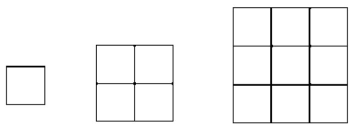
$$
\begin{array}{rl}
 & a_2 = a_1 + 2 \times 1 + 1 \\
 & a_3 = a_2 + 2 \times 2 + 1 \\
 & a_4 = a_3 + 2 \times 3 + 1 \\
 & \vdots \\
+) & a_{20} = a_{19} + 2 \times 19 + 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$a_{20} = a_1 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) + 1 \times 19 = 1 + 2 \times \dfrac{1}{2} \times 19 \times 20 + 19 = 20 + 380 = 400$

4. 一個邊長爲 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 a_n 根火柴棒，那麼 $a_{n+1} - a_n =$__________。

【解答】$4n + 4$

【詳解】



a_1=4　a_2=12　a_3=24

當 $n = 1$ 時，$a_1 = 4$；

當 $n = 2$ 時，$a_2 = 12 = 4 + 8 = a_1 + 4 \cdot 2$

當 $n = 3$ 時，$a_3 = 24 = 12 + 12 = a_2 + 4 \cdot 3$；

當 $n = 4$ 時，$a_4 = 40 = 24 + 16 = a_3 + 4 \cdot 4$，⋯

當 $n = k + 1$ 時，$a_{k+1} = a_k + 4(k + 1)$

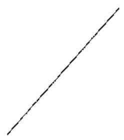
故可推得 $a_{n+1} = a_n + 4(n + 1) \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 4(n+1)$

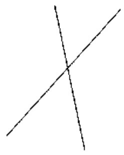
5. 在同一平面上，n 條直線最多將平面分割成__________個區域。

【解答】$\dfrac{n^2+n+2}{2}$

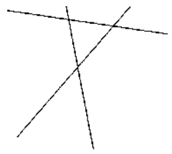
【詳解】

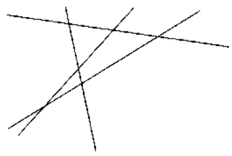
(1) $n=1 \quad \Rightarrow \quad a_1=2$ 個區域　　　(2) $n=2 \quad \Rightarrow \quad a_2=a_1+2=4$ 個區域





(3) $n=3 \quad \Rightarrow \quad a_3=a_2+3=7$ 個區域　(4) $n=4 \quad \Rightarrow \quad a_4=a_3+4=11$ 個區域





故 $a_n \ = a_{n-1}+n$

即　$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

$\vdots$

$+) \quad a_n=a_{n-1}+n$

$a_n=a_1+2+3+4+\cdots+n$

$a_n=2+2+3+4+\cdots+n=2+\dfrac{(n-1)(2+n)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

6. 設 $n\in N$ 時，我們無法利用數學歸納法證明 $2+6+10+\cdots+2(2n-1)=2n^2+2$ 的原因是__________。

【解答】$n=1$ 時，此式不成立

7. 平面上 n 條相異直線中，任兩條不平行，任三條不共點；若此 n 條直線將平面分割成 a_n 個區域，試利用遞迴關係求得 $a_{10}=$ __________。

【解答】56

【詳解】

$a_{10}=\dfrac{n^2+n+2}{2}=\dfrac{10^2+10+2}{2}=56$

8. 數列$< a_n >$中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$，$n \in N$，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】6

【詳解】

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$，$a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(a_n - 6)$，$a_1 = 1$，

$$a_2 - 6 = \frac{1}{2}(a_1 - 6)$$

$$a_3 - 6 = \frac{1}{2}(a_2 - 6)$$

$$a_4 - 6 = \frac{1}{2}(a_3 - 6)$$

$$\vdots$$

$$\times)\, a_n - 6 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 6)$$

$a_n - 6 = (\frac{1}{2})^{n-1}(a_1 - 6) \Rightarrow a_n = -5 \times (\frac{1}{2})^{n-1} + 6$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-5(\frac{1}{2})^{n-1} + 6) = 6$

9. 級數$\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$之和為＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

【詳解】

《SOL 一》

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

《SOL 二》公式法

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \cdots\cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

10.求 $1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + \cdots + 30 + 30^2$ 之和=＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】9920

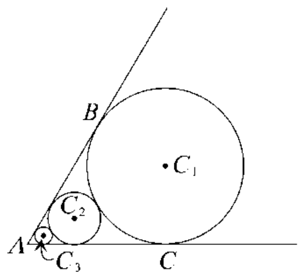
【詳解】

原式$= (1 + 2 + \cdots + 30) + (1^2 + 2^2 + \cdots + 30^2)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 = 465 + 9455 = 9920$$

11.$\angle BAC=60°$，圓 C_1 與 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 均相切，圓 C_2 與圓 C_1 外切且與 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 也相切，而圓 C_2 半徑小於圓 C_1；圓 C_3 與圓 C_2 外切且與 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 也相切，圓 C_3 半徑小於圓 C_2；圓 C_4 與圓 C_3 外切且與 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 也相切，圓 C_4 半徑小於圓 C_3，依此類推，得一系列的圓 C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，…，C_n，…，則

(1) $\dfrac{\text{圓}C_2\text{的面積}}{\text{圓}C_1\text{的面積}}=$ ________。 (2) $\dfrac{\text{圓}C_{n+1}\text{的面積}}{\text{圓}C_n\text{的面積}}=$ ________。



【解答】(1) $\dfrac{1}{9}$ (2) $\dfrac{1}{9}$

【詳解】$\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_3}{r_2}=\dfrac{r_4}{r_3}=\cdots\cdots=\dfrac{r_{n+1}}{r_n}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ 面積比 $=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$

12. 求 $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+n(2n+1)$ 的和爲________。

【解答】$\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

【詳解】

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+n(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}[2(2n+1)+3]=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

四、證明題(每題 10 分)

1. $n\in N$，證明：$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)=2^n[1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]$。

【證明】

(1)當 $n=1$ 時，左式$=2=2^1(1)=$右式 $\therefore$ 原式成立

(2)設 $n=k$ 時， $(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)=2^k[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]$ 原式成立，

當 $n=k+1$ 時，左式$=(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k)\cdot(2k+1)[2(k+1)]$

$=2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k)(2k+1)$

$=2\cdot2^k[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]\cdot(2k+1)$

$=2^{k+1}\cdot[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)(2k+1)]=$右式 ，原式成立

(3)由數學歸納法，

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)=2^n[1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]$恆成立，$\forall n\in N$

2. $n\in N$，$2^{n+2}+3^{2n+1}$ 爲某一質數 p 的倍數

(1)求此質數 p (2)以數學歸納法證明之。

【解答】(1) $p=7$

【詳解】

(1)令 $f(n)=2^{n+2}+3^{2n+1}$

$\because$ $f(1)=3^3+2^3=35=5\times 7$，$f(2)=3^5+2^4=259=7\times 37$ $\Leftrightarrow$ 質數 $p=7$

(2)當 $n=1$ 時，$f(1)=35=5\times 7$ 爲 7 的倍數

設 $n=k$ 時成立，即 $f(k)=2^{k+2}+3^{2k+1}=7m$，$m\in N$

當 $n=k+1$ 時，$f(k+1)=2^{k+3}+3^{2k+3}=2\cdot 2^{k+2}+9\cdot 3^{2k+1}$

$=2(2^{k+2}+3^{2k+1})+7\cdot 3^{2k+1}=2\cdot 7m+7\cdot 3^{2k+1}=7(2m+3^{2k+1})$爲 7 的倍數

由數學歸納法，知$\forall n\in N$，$2^{n+2}+3^{2n+1}$恆爲 7 的倍數

3. 試利用數學歸納法證明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$\forall n\in N$。

【證明】

(1)當 $n=1$，$1^3=1=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ $\therefore$，顯然成立

(2)假設 $n=k$ 時，原式成立，即 $f(k)=1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

當 $n=k+1$ 時，$f(k+1)=1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$，成立

根據數學歸納法：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$\forall n\in N$。

4. 試證：對所有自然數 n 而言，下式恆成立：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

【證明】

① 當 $n=1$ 時，左式 $1^2=1$，右式$=\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，故原式成立

②設 $n=k$ 時，$1^2+2^2+\cdots+k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

當 $n=k+1$ 時，$1^2+2^2+\cdots+n^2=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，成立

由數學歸納法知，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\forall n\in N$。

5. 試利用數學歸納法證明：

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$，$\forall n\in N$

【證明】

(1)當 $n=1$ 時，左式$=1\cdot2\cdot3=6$，右式$=\dfrac{1}{4}\cdot1\cdot(1+1)\cdot(1+2)\cdot(1+3)=6$，

$\therefore$左式=右式，　成立

(2)設 $n=k$ 時，$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)=\dfrac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$

當 $n=k+1$ 時，$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)$

$=\dfrac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3)$

$=\dfrac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$，　原式成立

由數學歸納法知：對於所有自然數

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$恆成立

6. 設 n 爲正整數，試證：$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$。

【證明】

(1)當 $n=1$ 時，左式$=1$，右式$=1$　$\therefore$　$n=1$ 時成立

(2)設 $n=k$ 原式成立，即設 $1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1=k^2$ 成立

當 $n=k+1$ 時，$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1$

$=[1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1]+(k+1)+k$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$，原式成立

由數學歸納法知

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$　對任意自然數 n 都成立

7. $n\in N$，$n\geq4$，證明：$3^n>n^3$。

【證明】

(1)當 $n=4$ 時，左式$=3^4=81>64=4^3$=右式　$\therefore$　原式成立

(2)設 $n=k$（$k\geq4$）時，原式成立，即 $3^k>k^3$

當 $n=k+1$ 時，　$3^{k+1}=3(3^k)>3(k^3)$

$=k^3+k^3+k^3$

$=k^3+k(k^2)+k^2(k)$

$\geq k^3 + 4k^2 + 4^2(k)$

$> k^3 + 4k^2 + 3k + k$

$> k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$= (k+1)^3$　　原式成立

(3)由數學歸納法原理，$3^n > n^3$，$\forall n \in N$，$n \geq 4$ 恆成立　.

8. $n \in N$，證明：$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ 是 17 的倍數。

【證明】

(1)當 $n = 1$ 時，原式$= 3 \times 5^3 + 2^4 = 391 = 17 \times 23$ 是 17 的倍數

(2)設 $n = k$ 時，原式是 17 的倍數，即 $3 \times 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17m$，$m \in N$

當 $n = k + 1$ 時，$3 \times 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1}$

$= 3 \times 5^{2k+3} + 2^{3k+4}$

$= 3 \times 5^{2k+1} \times 5^2 + 2^{3k+1} \times 2^3$

$= 25(3 \times 5^{2k+1}) + 8(2^{3k+1})$

$= 8(3 \times 5^{2k+1} + 2^{3k+1}) + 17(5^{2k+1})$

$= 8(17m + 2^{3k+1}) + 17(5^{2k+1}) = 17(25m) - 17(2^{3k+1})$爲 17 的倍數

(3)由數學歸納法　$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ 是 17 的倍數，對任意自然數 n 都成立.

9. 有一級數：$5 \times 7 + 8 \times 9 + 11 \times 11 + 14 \times 13 + \cdots + 92 \times 65$，

(1)試用 Σ 這個符號來表示此級數。

(2)試利用 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 這個結果求此級數的和。

【解答】(1) $\sum_{k=1}^{30}(3k+2)(2k+5)$　(2) 65865

【詳解】

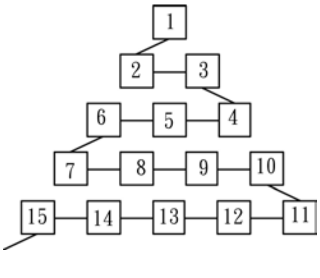
(1) $5 \times 7 + 8 \times 9 + 11 \times 11 + 14 \times 13 + \cdots + 92 \times 65 = \sum_{k=1}^{30}(3k+2)(2k+5)$

(2) $\sum_{k=1}^{30}(3k+2)(2k+5) = \sum_{k=1}^{30}(6k^2 + 19k + 10) = 6\sum_{k=1}^{30}k^2 + 19\sum_{k=1}^{30}k + 10\sum_{k=1}^{30}1$

$= 6 \times \dfrac{30 \times 31 \times 61}{6} + 19 \times \dfrac{30 \times 31}{2} + 10 \times 30$

$= 56730 + 8835 + 300 = 65865$

10. 右圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：數字1出現在第1列；數字2,3出現在第 2 列；數字 6,5,4 (從左至右)出現在第3列；數字7,8,9,10出現在第 4 列；依此類推。試問第99列，從左至右算，第67 個數字爲______。



答案：4884

解析：

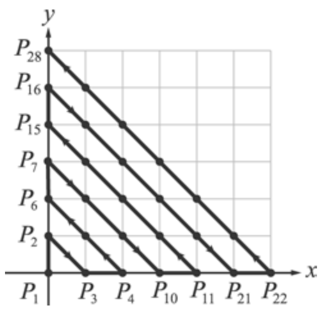
第 1 列有 1 個數，第 2 列有 2 個數(左→右)，第 3 列有 3 個數(右→左)，…，第 k 列有 k

個數(？→？)，⋯，第奇數列(右→左)，第偶數列(左→右)、因此到第 98 列爲止，共有

$1+2+\cdots+98=\dfrac{99\times 98}{2}=4851$ 個數，又第 99 列有 99 個數，且是由右而左算，故由左至右

算的第 67 個數字(67+32=99)即由右至左第 $99-67+1=33$ 個，所以數字爲 $4851+33=4884$

11. 坐標平面上，把坐標爲 (a,b)，a，b 是整數且 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ 的點 $P_1,P_2,P_3,\cdots\cdots$ 依圖所示，連成一串，從原點 $P_1(0,0)$ 起算，若點 P_{1001} 在直線 $x+y=k$ 上，求 k 值及該點坐標。



【解答】$k=44$，$(34,10)$

【詳解】

$k=0\Rightarrow$ 1個數、 $P_1(0,0)$ 在 $x+y=0$

$k=1\Rightarrow$ 2個數 ↘、 $P_2(0,1),P_3(1,0)$ 在 $x+y=1$

$k=2\Rightarrow$ 3個數 ↖、 $P_4(2,0),P_5(1,1),P_6(0,2),$ 在 $x+y=2$

$k=3\Rightarrow$ 4個數 ↘、 $P_7(0,3),P_8(1,2),P_7(2,1),P_8(3,0)$ 在 $x+y=3$

⋮

$k=n\Rightarrow$ $n+1$個數(k 爲奇數 ↘ , k 爲偶數 ↖)、依序在 $x+y=n$ 上

第 1001 個點所在的直線是 $x+y=k$ ，則從原點 P_1 起算到這直線第一個點之前的點數共

有 $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 由題意得 $\dfrac{k(k+1)}{2}<1001\Rightarrow k(k+1)<2002$

則 $k=44$ 爲滿足不等式的最大整數，第 1001 個點在直線 $x+y=44$ 上，此直線上有 45

個點 ↖，坐標是（44，0），（43，1），（42，2），⋯，（0，44），其中（44，0）

是由原點起算的第$\dfrac{44\cdot 45}{2}+1=991$ 個，再往 ↖ 數 10 個，第 1001 個的坐標是 $(34,10)$