高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.11.23					
範圍	2-2 無窮數列級數(2)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1. 下列各無窮級數，何者爲收斂級數？

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}10(-1)^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{50}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^{n+1}}{9^{n-1}})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+n-1}{n^2})$

【解答】(C)

【詳解】

(A)錯。$-10+10-10+10-10+\ldots\ldots\Rightarrow$公比 $r=-1$，跳動數列，故發散

(B)錯。$\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\ldots\ldots\Rightarrow$公比 $r=1$，故發散

(C)對。$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^{n+1}}{9^{n-1}})=\sum_{n=1}^{\infty}4^2$ ‧ $(\frac{4}{9})^{n-1}=16+16(\frac{4}{9})+16(\frac{4}{9})^2+\ldots\Rightarrow$ ，公比 $r=\frac{4}{9}$ ，收斂

(D)錯。原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=\sum_{n=1}^{\infty}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}>\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$，故發散

二、多重選擇題(每題 10 分)

1. 下列式子哪些是正確的？

(A) $1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots=0$

(B) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(C) $1-2+4-8+16-32+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-(-2)}$

(D) $2.\overline{9}<3$

(E)無窮級數 $1+2+4+\cdots+2^{30}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$是收斂的

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A)$1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$數列$<(-1)^{n-1}>$爲振動數列，其極限不存在，故其和不存在

(B)$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots=1+(\frac{-1}{\sqrt{2}})+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^3+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots$

$=\frac{1}{1-(\frac{-1}{\sqrt{2}})}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $(\because\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.414}<1)$

(C)$1-2+4-8+16-32+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$

$=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$公比 $r=-2$ $\therefore$級數發散

(D) $2.\overline{9}=2+0.9+0.09+0.009+\cdots=2+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=2+\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=2+1=3$

(E) $1+2+4+\cdots+2^{30}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$

$=1+2+2^2+\cdots+2^{30}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1+2+2^2+\cdots+2^{30}+1=2^{31}$ $\therefore$ 此級數是收斂的

2. 下列無窮數列，何者收斂？

(A) $<\frac{n^2+n+1}{n^2+3}>$ (B) $<\frac{2n-5}{3n^2+n+1}>$ (C) $<\frac{n^2+999}{3n-1000}>$ (D) $<(\frac{101}{100})^n>$ (E) $<(-1)^n>$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)$\because$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$ $\therefore$ 收斂

(B)$\because$ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{3+0+0}=0$ $\therefore$ 收斂

(C)$\because$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+999}{3n-1000}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{999}{n}}{3-\frac{1000}{n}}=\frac{\infty+0}{3-0}=\infty$，不存在 $\therefore$ 發散

(D)$\because$ $\lim_{n\to\infty}(\frac{101}{100})^n=\infty$，不存在 (公比$=\frac{101}{100}>1$) $\therefore$ 發散

(E)$\because$ $\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1，n\text{為奇數}\\ 1，n\text{為偶數}\end{cases}$，不是定數 $\therefore$ $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$不存在 $\therefore$ 數列發散

三、填充題(每題 10 分)

1. 求$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+4}{n^2-3n}=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+4}{n^2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n^2-5n+4)}{n^2}}{\frac{(n^2-3n)}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1-\frac{3}{n}})=\frac{2-0+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

2. $\sum_{k=2}^{13} 6 =$ ________。

【解答】72

【詳解】$\sum_{k=2}^{13} 6 = \underbrace{6+6+\cdots+6}_{12個} = 12\times 6 = 72 \Leftarrow k = 2,3,4,.....,12,13$ 共 $13-2+1=12$ 項

3. (1) n 項級數 $1+(1+2)+(1+2+3)+\ \cdots\ +(1+2+3+\ \cdots\ +n)$ 之和爲________。

(2) n 項級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ \cdots\ +\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 之和爲________。

【解答】(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　(2) $\frac{2n}{n+1}$

【詳解】

(1)一般項 $a_k = 1+2+\ \cdots\ +k = \frac{1}{2}k(k+1)$

原式 $=\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \Leftarrow$ 公式

(2)一般項 $a_k = \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} = 2(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

原式 $=\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = 2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ \cdots\ +(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$

$= 2(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}$

4. 橘子收成時，農人將它們堆成一堆，形成一正方形垛，每層都是一個正方形，設由上往下第 n 層有 a_n 個橘子（如下圖），今共堆了 20 層，試問共堆了________個橘子。

【解答】2870

【詳解】

$a_n = n^2$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 = \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20(20+1)(2\times 20+1)}{6} = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} = 2870$

5. 將 $0.\overline{6}\times 0.2\overline{3}$ 化爲最簡之有理數 = ________。

【解答】$\frac{7}{45}$

【詳解】

$0.\overline{6}\times 0.2\overline{3}=\dfrac{6}{9}\times\dfrac{23-2}{90}=\dfrac{7}{45}$

6. 無窮級數$\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{2}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{2}{10^5}+\cdots+\dfrac{1}{10^{2n}}+\dfrac{2}{10^{2n+1}}+\cdots$之和爲__________。

【解答】$\dfrac{103}{330}$

【詳解】

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{10}+\left(\frac{2}{10}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}+\frac{20}{99}+\frac{1}{99}=\frac{99+200+10}{990}=\frac{103}{330}$$

7. 無窮等比級數$1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\cdots+(-\dfrac{2}{3})^{n-1}+\cdots$之和爲$S$，其前$n$項的和爲$S_n$，則使 $|S-S_n|<\dfrac{1}{10}$ 之最小正整數$n=$ __________ 。

【解答】5

【詳解】

$$S=\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\text{，}S_n=\frac{1\cdot[1-(-\frac{2}{3})^n]}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{3}{5}[1-(-\frac{2}{3})^n]$$

$$|S-S_n|=|\frac{3}{5}-\frac{3}{5}[1-(\frac{2}{3})^n]\ |=|\frac{3}{5}(-\frac{2}{3})^n|=\frac{3}{5}\times(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{10}\text{，}(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{10}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\text{而}(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}=\frac{8}{18}>\frac{3}{18}=\frac{1}{6}\text{，}(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}=\frac{16}{54}>\frac{9}{54}=\frac{1}{6}$$

$$(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}=\frac{32}{162}>\frac{27}{162}=\frac{1}{6}\text{，}(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}=\frac{64}{486}<\frac{81}{486}=\frac{1}{6}\quad\therefore\ n\text{ 最小爲 }5$$

8. 無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2x}{1-x})^n$ 爲收斂級數，則x範圍爲__________；又若此級數和爲$\dfrac{-(2x+4)}{x+8}$，則$x=$ __________ 。

【解答】$-1<x<\dfrac{1}{3}$ ；$\dfrac{-1}{2}$

【詳解】

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{1-x})^n\text{ 收斂級數}\quad\Leftrightarrow\quad|\frac{2x}{1-x}|<1\quad\Leftrightarrow\quad|2x|<|1-x|\quad\Leftrightarrow\quad 4x^2<1-2x+x^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 3x^2+2x-1<0\quad\Leftrightarrow\quad(3x-1)(x+1)<0\quad\Leftrightarrow\quad -1<x<\frac{1}{3}$$

(2)$\because$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{1-x})^n$ 是收斂級數 $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{1-x})^n=\frac{\frac{2x}{1-x}}{1-\frac{2x}{1-x}}=\frac{2x}{1-3x}$

又無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2x}{1-x})^n$ 的和爲 $\frac{-(2x+4)}{x+8}$，故

$\frac{2x}{1-3x}=\frac{-(2x+4)}{x+8}$ $\Leftrightarrow$ $2x(x+8)=-(2x+4)(1-3x)$

$\Leftrightarrow$ $2x^2-3x-2=0$ $\Leftrightarrow$ $(2x+1)(x-2)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=2$

又 $-1<x<\frac{1}{3}$，故取 $x=-\frac{1}{2}$

9. 求 $\sum_{k=1}^{20}[(k-1)(k-2)]=$__________。

【解答】2280

【詳解】

$\sum_{k=1}^{20}[(k-1)(k-2)]=\sum_{k=1}^{20}(k^2-3k+2)=\sum_{k=1}^{20}k^2-3\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}2$

$=\frac{1}{6}\times 20\times 21\times 41-3\times\frac{20\times 21}{2}+2\times 20=2280$

10. 設 a，b，$c\in N$，$1<a<b<c<9$，且$<0.\overline{a}$，$0.0\overline{b}$，$0.00\overline{c}$，$\cdots>$成等比數列，則

(1) $(a，b，c)=$__________。(2)該數列之第四項爲__________。（寫成循環小數）

【解答】(1) (2，4，8)　(2) $0.001\overline{7}$

【詳解】

(1) $0.\overline{a}$，$0.0\overline{b}$，$0.00\overline{c}$成等比，即$\frac{a}{9}$，$\frac{b}{90}$，$\frac{c}{900}$成等比

則$\frac{a}{9}\times\frac{c}{900}=(\frac{b}{90})^2$ $\Rightarrow$ $b^2=ac$，又 $1<a<b<c<9$　則$(a，b，c)=(2，4，8)$

(2)數列爲$<\frac{2}{9}$，$\frac{4}{90}$，$\frac{8}{900}$，$\cdots>$，首項 $a_1=\frac{2}{9}$，公比 $r=\frac{\frac{4}{90}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{5}$

故第四項 $a_4=a_1r^3=\frac{2}{9}\times\frac{1}{125}=\frac{16}{9000}=0.001\overline{7}$

11.一皮球自 120 公尺高處落下，每次反跳$\frac{2}{3}$的高度，則至靜止皮球所經過的距離爲__公尺。

【解答】600

【詳解】

球最先落下經過 120 公尺，因每次反彈的高度為前高度的$\frac{2}{3}$

高度依次分別為 120、$120(\frac{2}{3})$、$120(\frac{2}{3})^2$、$120(\frac{2}{3})^3$..................... 公尺(上、下各一趟、第一次落地只有往下一次)

所求距離和$= 120 + 2\times 120(\frac{2}{3}) + 2\times 120(\frac{2}{3})^2 + 2\times 120(\frac{2}{3})^3 + \cdots\cdots\cdots$

$$= 120 + 240\left[\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 + \cdots\cdots\right] = 120 + 240\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 600$$

12.設 a 與 b 均為實數。若無窮級數$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$，則 $2a+b$ = ＿＿＿＿＿。

【解答】9

【詳解】

$$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$$

$$a\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots\right)+b\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\right)=3$$

$a\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}\right)+b\left(\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}\right)=3$，故得 $2a+b=9$

13.設 x 為實數，

(1)若無窮數列 $\langle x^n(2x-1)^n\rangle$ 收斂，則 x 的範圍為＿＿＿＿＿。

(2)若無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}x(2x-1)^n$ 收斂，則 x 的範圍為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-\frac{1}{2}\le x\le 1$　(2) $0\le x<1$

【詳解】

(1)$\because$ $\langle x^n(2x-1)^n\rangle$ 之公比為 $x(2x-1)$

$\therefore$ $\langle x^n(2x-1)^n\rangle$ 收斂 $\Leftrightarrow$ $|x(2x-1)|<1$ 或 $x(2x-1)=1$

$\Leftrightarrow$ $(2x^2-x)^2-1^2<0$ 或 $2x^2-x-1=0$

$\Leftrightarrow$ $(2x^2-x-1)(2x^2-x+1)<0$ 或 $(2x+1)(x-1)=0$

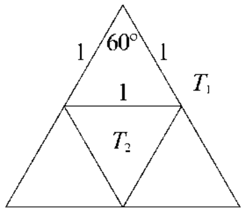
$\because$ $2x^2-x+1=2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$　恆正

$\therefore$ $2x^2-x-1<0$ 或 $(2x+1)(x-1)=0 \Rightarrow$ $(2x+1)(x-1)\le 0$　$\therefore$ $-\frac{1}{2}\le x\le 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x(2x-1)^n$ 收斂 $\Leftrightarrow$ $|2x-1|<1$ 或 $x=0$ $\Leftrightarrow$ $-1<2x-1<1$ 或 $x=0$

$\Leftrightarrow$ $0<2x<2$ 或 $x=0$ $\Leftrightarrow$ $0<x<1$ 或 $x=0$ $\Leftrightarrow$ $0\le x<1$

14.邊長為 2 之正三角形 T_1，T_1 各邊中點連成正三角形 T_2，T_2 各邊中點連成正三角形 T_3，依序作圖至無窮，則所有正三角形面積之總和為__________。



【解答】$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

【詳解】三角形三邊中點連成三角形面積為原三角形的 $\dfrac{1}{4}$

T_1 之面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2$，$T_2$ 之邊長為 $2\times\dfrac{1}{2}$，則面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2})^2$

T_3 之邊長為 $2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$，則面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2})^2\cdots$

$\therefore$ 所求$=T_1+T_2+T_3+\cdots=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2})^2+\cdots$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[\,2^2+2^2\times(\frac{1}{2})^2+2^2\times(\frac{1}{2})^4+\cdots]=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

15.(1)設一個無窮等比級數之和為 $\dfrac{9}{2}$，其第二項為-2，若其首項為 a，公比為 r，則

$a=$__________；$r=$__________。

(2) $x\in R$，$x\ne 1$，若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x)x^{n-1}$ 之和為 S，則 x 的範圍________；$S=$______。

【解答】(1) 6；$\dfrac{-1}{3}$ (2) $-1\le x<1$；$\dfrac{1+x}{1-x}$

【詳解】

(1) $\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{9}{2}\cdots\cdots① \\ ar=-2\quad\cdots\cdots②\end{cases}$

$\dfrac{①}{②}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{r(1-r)}=\dfrac{-9}{4}$ $\Rightarrow$ $9r^2-9r-4=0$ $\Rightarrow$ $(3r+1)(3r-4)=0$

得 $r=\dfrac{-1}{3}$，$\dfrac{4}{3}$（不合 $\because$ $|r|<1$ 才收斂），$r=\dfrac{-1}{3}$ 代入② $\Rightarrow$ $a=6$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x)x^{n-1}=(1+x)+x(1+x)+x^2(1+x)+\cdots=\dfrac{1+x}{1-x}=S$，$\sum_{n=1}^{\infty}(1+x)x^{n-1}$ 收斂於 S

則❶ $1+x=0$ $\Rightarrow$ $x=-1\cdots\cdots①$ 或❷公比 $r=x$，則 $-1<x<1\cdots\cdots②$

$①\cup②$ $\Rightarrow$ x 的範圍為 $-1\le x<1$